

國立中央大學

大氣物理研究所

碩士論文

利用單都卜勒雷達反演三維風場之研究  
以數值模式資料驗證

研究生：章鶴群

指導教授：廖宇慶 博士

中華民國九十二年六月



# 國立中央大學圖書館

## 碩博士論文授權書

(91年5月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文與電子檔，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

(  )同意 (立即開放)

(  )同意 (一年後開放)，原因是：\_\_\_\_\_

(  )同意 (二年後開放)，原因是：\_\_\_\_\_

(  )不同意，原因是：\_\_\_\_\_

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動讀者間「資源共享 互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、光碟、網路或其它各種方法收錄、重製、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用。以提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 章鶴群

論文名稱： 利用單都卜勒雷達反演三維風場之研究 以數值模式資料驗證

指導教授姓名： 廖宇慶

系所： 大氣物理 所 博士 碩士班

學號： 90621002

日期：民國 92 年 6 月 23 日

備註：

1. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁(全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替)。
2. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館(以統一代轉寄給國家圖書館)。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

## 摘要

移動座標法是單都卜勒雷達反演風場的一種方法。為了減少因為雷達不連續觀測所造成計算上的誤差，所以在反演的過程中採用移動的參考座標。此方法主要是利用雷達觀測到的回波、徑向風 ( $V_r$ )，配合著若干數學上的約束條件，以變分法解出一個風場，能夠最滿足這些約束條件。傳統上，此方法是用於反演低層的水平風場 ( $u, v$ )，而移動座標的移速是指系統水平移速 ( $U, V$ )。

本研究改變了移動座標為「水平」的傳統，將反演的區域從二維平面推廣到三維的空間中，嘗試同時反演三個未知的變數 ( $u, v, w$ )。為了要驗證此方法的可行性，先採用簡單的平流模式初步証實是可行的，此平流模式模擬回波隨著風場的平流效應而移動，風場並不隨著時間改變。

其次，再利用 RAMS model 產生的理想資料做測試，RAMS Model 所模擬的風場是根據流體力學方程組預報的，因此會隨時間改變。測試的結果顯示，這樣在三維空間中的反演是可行的，並且對於垂直速度反演的相當好，相關係數均能夠達到 0.9 以上。而反演的區域與雷達距離的遠近、掃描的策略不同以及系統是否有移速，並沒有太大的影響，可能是因為本實驗中使用滿足流體力學的方程式、回波保守、且無觀測誤差的理想數值模式的資料進行反演。

# ABSTRACT

The moving frame of reference technique is a method that retrieves wind field from single-Doppler radar observed radial wind and reflectivity. In this paper, this technique is developed to retrieve three dimension wind field. The performance of this method is explored using idealized data sets generated from a numerical model. Several factors which may affect retrieval results have been tested. These factors include: the distance between the radar site to the area of interest; the scanning strategy; as well as the moving speed of the weather system. The results show that three-dimensional wind field can be retrieved accurately from single-Doppler radar observed radial wind and reflectivity simulated by numerical model. Especially, there is high correlation between the retrieved vertical flow structure and its true counterpart. This result is particularly encouraging.

## 致謝

在國中之前的我，總是對未來有很多很多的夢想，想成為一個廚師，一個計程車司機，一個工程師，一個畫家。會有這樣的想法完全是因為這些個式個樣的人物在生活中總是時常的出現，所以對於這些事物總是有特別多的幻想和憧憬。在成長的過程中，逐漸的了解小時候的那些夢想，並不都是我所喜歡去從事的。國中的時代，我像一個書呆子一樣看了很多很多的書，其中有一部份是偉人傳記，從哥白尼、牛頓、萊特兄弟、諾貝爾、愛迪生一直到近代的費曼、吳健雄、愛因斯坦、霍金，我想這些書對於我選擇今天走上這條路有很大的影響，因為我發現成為一個科學家似乎對於我來說是一個不錯的選擇。

接著在自我的摸索和一連串的巧合下，踏上了研究大氣這門學問的不歸路。這一本論文是我對於從懂事到現在的一個總結，也是給未來的我一個基礎，接下來的一切一切將從這本論文出發。終點是哪裡？我不知道，也許是指向遙不可及的諾貝爾獎。

在這一路走來，遇到了很多很多人也發生了很多事，對於我都有或多或少的影響。就這兩年的研究所的日子裡來說，最重要的一號人物當然是我的老闆廖老師，這整篇論文的主題、方向和方法，全是來自廖老師，為了完成這本論文，從他頭髮蒼白的程度就可以知道他傷了多少腦筋。實驗室的其他成員們，包括陳台琦老師、鍾高陞學長、江晉孝同學、如馨學妹，是不得不提到的人物，從他們身上，我學到了很多很多的事情，也讓我產生了很多很多的想法。還有在我最煩悶的時候為我抒解壓力和分擔煩惱的雅茹和潔如，十分感謝她們的照顧和關心。

最後，是感謝我最親愛的家人。

前面沒有提到的那些大物所同學和學弟妹，以及過去在大學四年中陪伴我的同學們，沒有提到並不表示被遺忘了，同樣的也十分感謝你們的照顧、關心和支持。

# 目錄

摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖表說明	vi
<b>第一章 前言</b>	<b>1</b>
1.1 研究動機：單都卜勒雷達反演風場的必要性	1
1.2 論文回顧：單都卜勒雷達反演風場的各種方法	1
1.3 研究方向：改變移動座標的方法以反演風場的垂直結構	4
<b>第二章 反演方法的理論基礎</b>	<b>6</b>
2.1 使用移動座標的優點	6
2.2 移動座標移速的計算	7
2.3 雷達資料內插到移動座標上	8
2.4 計算擾動風場 (ZG96)	9
2.5 計算擾動風場 (L99)	11
2.6 將 L99 推廣到三維的空間	15
2.7 權重的分配方法	17
<b>第三章 利用簡單的平流模式驗證</b>	<b>20</b>
3.1 簡單的平流模式	20
3.2 簡單平流方程式模擬雷達觀測的反演結果	20
<b>第四章 利用 RAMS model 進行反演的實驗</b>	<b>22</b>

4.1 利用 RAMS model 模擬雷達的觀測	22
4.2 誤差的計算	23
4.3 實驗一：RAMS model 模擬雷達觀測的反演結果	23
4.4 實驗二：系統具有移速	26
4.5 實驗三：雷達與反演區塊的距離	29
4.6 實驗四：掃瞄策略	30
<b>第五章 結論與展望</b>	<b>31</b>
附錄 A	33
參考文獻	49
附表及附圖	52

## 圖表說明

表 1 實驗的各個變數及移動座標的移速、RMS、RRMSE、SCC 及 RMSM

表 2 比較系統具有移速的 RMSE、RRMSE、SCC、RMSM

表 3 比較雷達與反演區域的距離的 RMSE、RRMSE、SCC、RMSM

表 4 比較不同把瞄策略的 RMSE、RRMSE、SCC、RMSM

圖 2.1 離散掃描下之回波示意圖。(a)表示  $t$  時，而(b)表示  $t + \Delta t$  時間，等值線表示回波值

圖 3.1 簡單的平流方程式所模擬的回波場

圖 3.2 簡單平流方程式所模擬的徑向風場

圖 3.3 簡單的平流方程式模擬風場的  $u$  分量

圖 3.4 風場反演得到的  $u$  分量

圖 3.5 簡單的平流方程式模擬風場的  $w$  分量

圖 3.6 風場反演得到的  $w$  分量

圖 3.7 簡單平流方程式模擬得到的向量場 ( $u$  和  $w$  合成)

圖 3.8 反演得到的向量場 ( $u$  和  $w$  合成)

圖 4.1 模式模擬得到的回波，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

圖 4.2 模式模擬得到的徑向風，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

圖 4.3 模式模擬得到的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

圖 4.4 反演得到的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

圖 4.5 模式模擬得到的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

圖 4.6 反演得到的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$



- 圖 4.7 模式得到的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.8 反演得到的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.9 模式模擬的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$
- 圖 4.10 反演得到的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$
- 圖 4.11 模式模擬的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$
- 圖 4.12 反演得到的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$
- 圖 4.13 模式模擬的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$
- 圖 4.14 反演得到的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$
- 圖 4.15 模式模擬  $u$  和  $w$  合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$
- 圖 4.16 反演得到的  $u$  和  $w$  合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$
- 圖 4.17 模式模擬  $v$  和  $w$  合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$
- 圖 4.18 模式模擬  $v$  和  $w$  合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$
- 圖 4.19 模式模擬輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.20 反演的輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.21 模擬的輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=2$

- 圖 4.22 反演的輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=2$
- 圖 4.24 反演得到的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$
- 圖 4.25 模式模擬的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.26 反演得到的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.27 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，間隔時間 3 分鐘，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.28 反演得到的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，間隔時間 3 分鐘，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.29 反演得到的  $u$  和  $v$  合成的向量場，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.30 反演得到的  $u$  和  $v$  合成的向量場，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$
- 圖 4.31 模式模擬的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$
- 圖 4.32 反演得到的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$
- 圖 4.33 模式模擬的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$
- 圖 4.34 反演得到的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$
- 圖 4.35 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$
- 圖 4.36 反演得到的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$
- 圖 4.37 模式模擬  $u$  和  $w$  合成的向量場， $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$

- 圖 4.38 模式模擬  $u$  和  $w$  合成的向量場,  $U=5\text{m/s}$ , 3 分鐘的掃瞄策略, 距離雷達 100 公里,  $Y=30$
- 圖 4.39 模式模擬的  $u$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Z=11$
- 圖 4.40 反演得到的  $u$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Z=11$
- 圖 4.41 模式模擬的  $v$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Z=11$
- 圖 4.42 反演得到的  $v$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Z=11$
- 圖 4.43 模式模擬的  $w$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Z=11$
- 圖 4.44 反演得到的  $w$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Z=11$
- 圖 4.45 模式模擬的  $u$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Y=30$
- 圖 4.46 反演得到的  $u$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $Y=30$
- 圖 4.47 模式模擬的  $v$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $X=30$
- 圖 4.48 反演得到的  $v$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $X=30$
- 圖 4.49 模式模擬的  $w$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $X=30$
- 圖 4.50 反演得到的  $w$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $X=30$
- 圖 4.51 模式模擬的  $w$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $X=30$
- 圖 4.52 反演得到的  $w$ , 系統移速  $V=5\text{m/s}$ , 距離雷達 100 公里, 3 分鐘的掃瞄策略,  $X=30$

# 第一章 前言

## 1.1 研究動機：單都卜勒雷達反演風場的必要性

目前氣象局已在五分山、七股、墾丁、花蓮建立了四座都卜勒雷達，再加上民航局的中正機場雷達，軍方的清泉崗雷達、綠島雷達，及中央大學於 2002 年升級成功的都卜勒雷達，已成為一環島的雷達網。在三萬六千平方公里的小小土地上有如此綿密的雷達網是世界少有的，如何善用這樣的資源是在台灣的雷達氣象相關的研究人員及從業人員共同思考的問題，本篇的主題就是在這樣的思考下所產生的。

由於一座都卜勒雷達所能夠觀測到的資訊，只有回波和徑向風。徑向風是真實的三維風在雷達徑向方向投影的總和。在進行一些天氣現象的分析及某些系統結構的分析，只有徑向風的資訊是不夠的。為了取得真實的三維風場，必需要找出風在雷達切向方向的分量，這是雷達所無法觀測的分量。

欲得到真實的風場，最簡單且常用的方法是，利用兩座雷達所觀測到相同區域的徑向風進行合成。不過進行雙雷達風場合成有它的限制和困難存在，例如說：兩座雷達要靠得夠近，並且只能夠合成兩座雷達都有掃描到的地方（靠近基線區域除外）必須有共同的掃描策略配合 等。

由於上述的理由，雷達氣象學家們就嘗試利用一座雷達所觀測到的回波和徑向風，再加上數學的方法，得到風在三維方向的分量。於是各式各樣的單都卜勒雷達反演風場的方法相繼的發展出來。

## 1.2 論文回顧：單都卜勒雷達反演風場各種方法

單都卜勒雷達反演風場的方法，主要可以分為三大類，第一類是早期的反演的方法，在計算的過程中並沒有使用到變分法，如 VAD、VVP 和 TREC 等方法。

VAD (Velocity Azimuth Display) 分析方法是從 1960 年代開始發展的，這方法使用傅利葉級數，展開分析某一固定仰角及距離上的徑向風觀測資料，其結果可以提供某一固定高度層風場運動特性的參數，如風向風速 水平輻合輻散場 伸展變形場 風切變形場 (Browning and Wexler, 1968)。

VVP (Volume Velocity Processing) 測風技術，則是假設風場在空間中呈線性變化，及掃瞄時間內分析體積中之風場不隨時間改變這兩項條件下，分析雷達觀測的一個分析體積內 (由雷達的徑向、切向、垂直方向構成的一個體積) 的水平風場 (Waldteufel and Corbin, 1979)。

TREC (Tracking Radar Echoes by Correlation) 是利用兩筆數分鐘間隔的雷達觀測資料，計算回波特徵的相關係數，去判斷回波移動的方向，進而追蹤出風場的分布 (Rinehart and Garvey, 1978)。以上這類的方法有個共同的缺點：即犧牲了雷達資料高空間解析度的優點。

第二類則是使用變分法反演風場，是 1990 年代初期才發展出來的，如伴隨法 (Adjoint Method)、簡單伴隨法 (Simple Adjoint Method)、最小平方法 (Least Square Method)、雙純量保守法 (Two Scale Conserve Method) 以及本文中所使用的移動座標法 (Moving Frame of Reference Method)。

伴隨法 (Sun et al. 1991) 是利用一個包含完整流體力學方程組的動力模式 (Navier - Stokes' Equations)，在藉由極小化模式所模擬出的回波及徑向速度與其觀測值的誤差的過程中，反演出三維風場和溫度場。但是因為伴隨法的計算量太龐大了，實際的運用上會有困難，所以 Qiu 和 Xu (1992) 僅使用回波保守方程做為其弱約束條件，其中亦是使用伴隨法來進行單雷達的風場反演，所以稱之為簡單伴隨法。

最小平方法 (Qiu and Xu, 1996) 從事單雷達的風場反演，是以徑

向動量方程作為主要的方程，與簡單伴隨法比較會發現這方法更有效率，但是對於雜訊及時間解析度的敏感度比較高。

雙純量保守方法 (Shapiro et al. 1995.; Weygant et al. 2002) 是利用兩個保守的純量去解出一個虛流函數 (pseudo-streamfunction)  $Q$ ，再利用這個流函數  $Q$  去求解雷達所無法觀測到的切向風。上述兩個純量的第一個保守純量是利用雷達觀測到的回波假設它為保守，第二個純量則是有兩種不同的假設方法，一種假設風場本身是為近似恆定 (Velocity stationarity) 另一個假設則是風場為 Frozen turbulence，也就是只考慮系統整體的平移速度 ( $U, V$ )，但是忽略其內部風場的局地變化。

移動座標法是 Zhang and Gal-Chen (1996) 根據 Gal-Chen (1982) 提出的概念為基礎的反演方法，也是本篇論文所使用的方法的理論基礎，在之後的段落及章節中會有詳細的說明。

這類的方法就沒有第一類方法犧牲了雷達觀測的高解析度資料的問題，雷達反演結果的空間解析度可以和雷達觀測資料的解析度相同，只是計算繁瑣，非常耗費電腦資源，不過電腦科技發達的今天，若這些方法能夠在運算速度最快，記憶體容量最大的電腦上計算，則完全不成問題。

第三大類則完全不屬於上述兩種方法，例如：GBVTD、非線性近似法。周等人 (1994) 和 Lee et al. (1999) 發展的 GBVTD 方法，利用登陸前颱風環流風場近似軸對稱的特性，使用幾何方法將雷達觀測的徑向風場予以傅氏級數展開，可求得颱風的軸對稱與非軸對稱切向風場、軸對稱徑向風場。另外趙坤等人 (2002) 提出一種以非線性近似理論為基礎的反演方法，該方法主要考慮了風場分片光滑的特點，並充份利用了雷達的徑向風場數據。

本篇所使用的移動座標法，在近十年已經發展得很完善。Gal-Chen (1982) 指出因雷達的觀測對一固定點是不連續的，計算回波對時間的的微分可能會有誤差，故令雷達的參考座標隨著觀測到的

回波系統移動，以減低誤差。Zhang and Gal-Chen (1996) 利用前述的概念發展出了一套完整反演風場的方法（以下簡稱 ZG96），它的基本假設是期望所反演出來的風場，能夠滿足回波保守及徑向風與  $u$ 、 $v$ 、 $w$  的關係式。

Liou (1999) 對此方法進行修正，加入了更多的約束條件，如連續方程等，使結果更平滑、接近真實情況，並且做了一系列的敏感度測試，得知這個方法對於回波的誤差比較敏感。

Liou and Lou (2001) 利用 TAMEX 實驗中的 IOP#2 資料作為真實個案的測試，有很不錯的結果，並且得知雷達與反演區域的相對位置有很大的影響，分析徑向風和雷達觀測不到的切向風，得知徑向風的比例愈高能得到愈好的反演結果，也發現了反演得到的風場都有低估的現象。Liou (2002) 利用了數學的理論證明由於雷達的離散觀測導致反演的風速總是低估。

### 1.3 研究方向：改變移動座標的方法以反演風場的垂直結構

在傳統的反演方法上，反演範圍都局限於低層的水平方向，而且反演得到的變數是  $u$  和  $v$ 。但是基於某些特殊天氣現象的分析，如雹暴、颱風、颶風等，期望瞭解其垂直結構及垂直風場。

Lazarus et al. (2001) 試著用 Kinematic 的方法、ZG96 的方法、修正後的 O'Brien (1970) 的方法反演垂直風場，並且使用三座雷達合成的風場進行驗證，發現用 ZG96 的方法反演垂直風場，不同的高度要用不同移動座標的移速才會有比較好的反演結果，更發現使用所謂的 Modified O'Brien 方法會比用 ZG96 直接計算垂直風場會有更小的誤差。Xu, et al. (2001) 利用 Simple Adjoint 方法，並將原本二維的風場反演發展成反演三維風場，以 Phoenix II 實驗的資料做驗證，Gao (2001) 利用同樣的方法反演垂直風場，利用 ARPS Model 的模擬做驗證，均有不錯的結果。

本篇則是使用 Liou (1999) 所改善的 ZG96 方法（以下簡稱 L99）

進行垂直風場的反演，嘗試著改變移動座標移動的方向，從原本的 xy 平面改為三度空間的形式，反演得到的變數為  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 。

本文的第二章是對反演的方法及計算過程做一個詳細的說明，包括 ZG96 的計算方法和 Liou (1999) 是如何改善 ZG96 這方法，進而推廣到三度空間。第三章是利用一個簡單的平流模式模擬雷達觀測到的徑向風場和回波場，先証實反演一個垂直平面的風場是正確可行的方法，這個模擬是令風場不隨著時間改變，只有回波隨著風場造成的平流效應在移動。第四章是用 RAMS Model 模擬一個比較複雜、會隨著時間變化的風場及回波場，並且把反演的區域推廣成三維的空間，用來進行敏感度測試，以瞭解這方法的誤差來源及可信度，分析雷達距離反演區域的遠近、掃瞄策略的不同以及系統是否有移動，對反演的結果有何影響？最後一章則是結論和未來的展望。



## 第二章 反演方法的理論基礎

### 2.1 使用移動座標的優點

許多單都卜勒風場反演方法均用到了回波 ( ) 保守方程：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + (w + W_t) \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

(2.1) 假設回波是保守的，只會隨著風場所造成的平流效應移動，本身並不會有生滅，其中  $W_t$  為空氣粒子的終端速度。但 Gal - Chen (1982) 指出，因為雷達的觀測在一個固定位置上不是連續的，所以在 (2.1) 中的  $\partial h / \partial t$  計算上會有很大的誤差。以圖 2.1 來說明，A 點為一固定的觀測點，圖中一圈圈的同心圓則為回波分佈，回波的強度是由內向外遞減，風場則是一簡單的水平風  $U$ 。站在 A 這一點看回波隨時間的變化，回波值會先遞增到最高值後遞減，在時間  $t$  時回波的瞬時變化  $\partial h(t) / \partial t > 0$ 。圖 2.1(a) 為雷達在  $t$  時間觀測到的回波分佈，圖 2.1(b) 為雷達在  $t + \Delta t$  時間觀測到的回波分佈。因雷達的離散觀測，只會測量到 A 點的回波值在時間  $t$  為 3.5，在時間  $t + \Delta t$  為 4.5，那麼計算時間  $t$  時的回波瞬時變化就會為  $\partial h(t) / \partial t \cong [h(t + \Delta t) - h(t)] / \Delta t = (3.5 - 4.5) / \Delta t < 0$ ，這與真實的情況有非常大的差異。為了減少這樣計算的誤差，Gal - Chen (1982) 提出移動座標的概念，令觀測的參考座標隨著回波系統移動，那麼在移動的座標下 A 點所觀測到的回波值就會是一個常數，回波的瞬時變化則為 0，這樣可以減低因離散觀測而造成計算上的誤差。把這樣的觀念利用在單雷達反演風場上，可以用下面公式來說明：

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U + u'(x, y, z) \\ v(x, y, z) &= V + v'(x, y, z) \\ w(x, y, z) &= W + w'(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2) 左項的  $u$ 、 $v$ 、 $w$  是反演得到的結果，右邊第一項  $U$ 、 $V$ 、 $W$  則

表示是回波系統的移速，也就是移動座標的移速，在整個反演的範圍裡面是一個常數；右邊第二項則為減去移動座標移速的擾動風場。

## 2.2 移動座標移速的計算

反演的第一步就是要求得移動座標的移速，要找到一組  $U$ 、 $V$ 、 $W$ ，使得 (2.1) 在反演的範圍內的每個點均完全滿足。但是，只有三個未知數，卻有遠超過三組的方程式要滿足。所以把 (2.1) 改寫成一個價值函數 (cost function) 的形式：

$$J_{mf} = \iint_{\Omega} \int_t \mathbf{a}_{mf} \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} + V \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial y} + (W + W_t) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right]^2 d\Omega dt \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}_{mf} = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \overline{W}_t \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right]^2 d\Omega \right\}^{-1} \quad (2.3a)$$

$$W_t = -3.088 \times \mathbf{h}^{0.0957} \quad (2.3b)$$

其中  $J_{mf}$  為價值函數， $\Omega$  為反演的區域， $\int_t$  為權重， $(\bar{\quad})$  表示時間的平均； $W_t$  是根據 Shapiro et al. (1995) 所定義的。若能夠找到一組  $U$ 、 $V$ 、 $W$  能使價值函數  $J_{mf}$  有極小值，則表示雖然不能令反演的範圍內所有的點都能夠「完全」滿足回波保守的假設，但是滿足的程度已經是達到最大。由於  $U$ 、 $V$ 、 $W$  在反演的範圍內的每一點是相同的，是一個常數，可以利用簡單的微積分演算法來求極值。根據微積分的理論， $J_{mf}$  為  $U$  的函數，那麼要找到  $U$  能令  $J_{mf}$  有極值出現，只要令  $J_{mf}$  對  $U$  的一次微分為 0 即可得到，同樣的方法可以利用在求取  $V$  和  $W$ ：

$$\frac{\partial J_{mf}}{\partial U} = \frac{\partial J_{mf}}{\partial V} = \frac{\partial J_{mf}}{\partial W} = 0 \quad (2.4)$$

從 (2.3) 及 (2.4) 經過一些推導和整理，可以得到下面這矩陣，此矩陣的解即為所求：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中

$$a_{ij=1,2,3} = \int_t \int_{\Omega} \mathbf{a}_{mf} \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_j} \right) d\Omega dt \quad (2.5a)$$

$$b_{i=1,2,3} = - \int_t \int_{\Omega} \mathbf{a}_{mf} \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + W_t \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right) d\Omega dt \quad (2.5b)$$

在上式中，為了方便起見，令  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  利用(2.5)即可解出一組  $U$ 、 $V$ 、 $W$ ，這就是移動座標的最佳移速。

在反演方過程中，常需要計算一些梯度量如： $\partial \mathbf{h} / \partial t$ 、 $\partial \mathbf{h} / \partial x$ 、 $\partial \mathbf{h} / \partial y$ 、 $\partial \mathbf{h} / \partial z$  等數值，是利用 Cubic Spline 求得的內差值，這樣的演算法會比平常用的中插法來得準確，而且同樣的只需要使用空間上三層的資料和三個時間掃描的資料就可以計算了。

### 2.3 雷達資料內插到移動座標上

得到了移動座標的移速之後，對參考座標進行平移，在 ZG96、L99 及 Liou and Luo (2001) 中均只考慮水平方向的平移，因此將所有原本在固定座標上的觀測資料重新定義在新的參考座標上，而新舊座標間的關係式可表示為：

$$\begin{cases} x' = x - U(t - t_0) \\ y' = y - V(t - t_0) \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (2.6)$$

其中  $t_0$  為一參考的時間，因為此移動座標只在水平方向移動，故令垂直速度  $W$  為 0。內差的方法則是用一簡單的客觀分析：

$$\begin{aligned}
f(x_o^k, y_o^k, z_o^k) &= f(x_g, y_g, z_g) + \frac{\partial f(x_g, y_g, z_g)}{\partial x} (x_o^k - x_g) \\
&+ \frac{\partial f(x_g, y_g, z_g)}{\partial y} (y_o^k - y_g) + \frac{\partial f(x_g, y_g, z_g)}{\partial z} (z_o^k - z_g)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中  $k=1, 2, \dots, M$ 。函數  $f(x_o^k, y_o^k, z_o^k)$  在這裡是表示觀測的回波或徑向風的速度場，並且假設它是一個線性的函數， $(x_o^k, y_o^k, z_o^k)$  是雷達觀測的座標，共有  $M$  點， $(x_g, y_g, z_g)$  則是移動座標的網格點的位置。在這裡是想要求得  $(f_g, \partial f_g / \partial x, \partial f_g / \partial y, \partial f_g / \partial z)$  等四個未知數，可以利用最小平方方法來解，最少需要四個觀測點的資料，求解的矩陣如下所示：

$$\begin{bmatrix}
N & \sum(x_o^k - x_g) & \sum(y_o^k - y_g) & \sum(z_o^k - z_g) \\
\sum(x_o^k - x_g) & \sum(x_o^k - x_g)^2 & \sum(x_o^k - x_g)(y_o^k - y_g) & \sum(x_o^k - x_g)(z_o^k - z_g) \\
\sum(y_o^k - y_g) & \sum(x_o^k - x_g)(y_o^k - y_g) & \sum(y_o^k - y_g)^2 & \sum(y_o^k - y_g)(z_o^k - z_g) \\
\sum(z_o^k - z_g) & \sum(x_o^k - x_g)(z_o^k - z_g) & \sum(y_o^k - y_g)(z_o^k - z_g) & \sum(z_o^k - z_g)^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f_g \\
\frac{\partial f_g}{\partial x} \\
\frac{\partial f_g}{\partial y} \\
\frac{\partial f_g}{\partial z}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum f(x_o^k, y_o^k, z_o^k) \\
\sum f(x_o^k, y_o^k, z_o^k)(x_o^k - x_g) \\
\sum f(x_o^k, y_o^k, z_o^k)(y_o^k - y_g) \\
\sum f(x_o^k, y_o^k, z_o^k)(z_o^k - z_g)
\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

## 2.4 計算擾動風場 (ZG96)

將雷達的資料都插分在移動座標的網格點上之後，要解出扣除移動座標移速的擾動風場  $u', v', w'$ 。ZG96 是利用回波保守 (2.1) 和雷達徑向風與  $u', v', w'$  的關係式做為約束條件如下式：

$$Vr = u \frac{x - p_1}{r} + v \frac{y - p_2}{r} + w \frac{z - p_3}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.9}$$

(2.9) 中的  $Vr$  為雷達觀測的徑向風， $(x, y, z)$  為網格點的位置， $(p_1, p_2, p_3)$  是雷達的位置， $r$  是網格點與雷達的直線距離。此約束條件能使得反演的風場與雷達的徑向風觀測吻合。

(2.1) 假設回波是保守的，只會隨著風場移動，本身並不會有生滅，是在做各種單都卜勒風場反演中常用的假設。只是在真實的大氣中，雷達觀測到的回波除了受到平流的影響外，還會受到其他物理因素的影響，如蒸發、凝結等的一些雲物理的過程，使得 (2.1) 有不小的誤差。因此希望藉用雷達快速的掃描，以及一個移動座標系

統，得到接近 (2.1) 條件的觀測結果。將 (2.1) 和 (2.9) 寫成一價值函數以解出擾動風場  $u', v', w'$ ：

$$J_{pert}(u', v', w') = \iiint_t \iiint_w \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{a}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t} + u' \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x} + v' \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial y} + (w' + W_t) \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mathbf{a}_2 \left( V_r' - u' \frac{x' - p_1'}{r'} + v' \frac{y' - p_2'}{r'} + w' \frac{z' - p_3'}{r'} \right)^2 \end{aligned} \right\} d\mathbf{w} dt \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{cases} p_1' = p_1 - U(t - t_0) \\ p_2' = p_2 - V(t - t_0) \\ p_3' = p_3 \end{cases} \quad (2.10a)$$

$$r' = \sqrt{(x' - p_1')^2 + (y' - p_2')^2 + (z' - p_3')^2} \quad (2.10b)$$

$$V_r' = V_r - U \frac{x' - p_1'}{r'} - V \frac{y' - p_2'}{r'} - W \frac{z' - p_3'}{r'} \quad (2.10c)$$

(2.10) 中 ( )' 表示此變數已位於移動參考座標上，而  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  為權重函數，由每一項的倒數所組成的，由於  $u', v', w'$  是要求得的未知數，所以權重函數就只能夠用已經的  $\mathbf{h}$  和  $V_r$  來估計，其定義如下：

$$\mathbf{a}_1 = \left\{ \frac{1}{\mathbf{w}} \iiint_w \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t'} \right) + W_t \left( \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial z'} \right) \right]^2 dx dy dz \right\}^{-1} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a}_2 = \left\{ \frac{1}{\mathbf{w}} \iiint_w (V_r')^2 dx dy dz \right\}^{-1} \quad (2.12)$$

(2.10) 積分的範圍 只包含了分析區域中的任一點與其相鄰的若干個點，並且假設在這樣的一個小範圍內擾動風  $u', v', w'$  為一常數。要解出這個價值函數的方式，就如同解出移動座標移速的方法，僅需要令  $J$  對  $u', v', w'$  的一次微分為零即可。經整理可得到一矩陣：

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

其中

$$c_{i=1\sim 3, j=1\sim 3} = \iiint_{T w} \left[ \mathbf{a}_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x_j} + \mathbf{a}_2 \left( \frac{x'_i - p'_i}{r'} \right) \left( \frac{x'_j - p'_j}{r'} \right) \right] dx dy dz dt \quad (2.13a)$$

$$d_{i=1\sim 3} = \iiint_{T w} \left\{ \mathbf{a}_1 \left[ - \left( \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t'} + W_t \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial z'} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x'_i} \right] + \mathbf{a}_2 \left[ v'_r \cdot \frac{x'_i - p'_i}{r'} \right] \right\} dx dy dz dt \quad (2.13b)$$

最後只需要將上列的線性代數方程式解出就可以得到該點的擾動風場。這個方法計算上相當的簡單，缺點是約束條件太少了，使得反演得到的風場與真實的風場還有些差異。

## 2.5 計算擾動風場 (L99)

在 Liou (1999) 的方法中，除了 (2.1) (2.9) 這兩組約束條件之外，還加上了連續方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

(2.14) 是假設大氣的質量是保守的，水平方向的輻合(散)量會等於垂直方向的輻散(合)量。如同 ZG96 的方法，將前述的約束條件 (2.1) (2.9) 和 (2.14) 寫成一價值函數，並在價值函數加上了弱水平、弱垂直渦度和高階空間平滑函數，若有 VAD 的觀測產品亦可以把其觀測結果加入：

$$J_{pert}(u', v', w') = \iiint_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{12} (\mathbf{a}_i J_i^2) \right\} d\Omega dt \quad (2.15)$$

$$J_1 = \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x'} + v \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial y'} + (w' + W_t) \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial z'} \quad (2.15a)$$

$$J_2 = Vr - u' \frac{x' - p'_1}{r'} - v' \frac{y' - p'_2}{r'} - w' \frac{z' - p'_3}{r'} \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (2.15b)$$

$$J_3 = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \quad (2.15c)$$

$$J_4 = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \quad (2.15d)$$

$$J_5 = \frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (2.15e)$$

$$J_6 = \frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \quad (2.15f)$$

$$J_7 = (\bar{u}' - \tilde{u}') \quad (2.15g)$$

$$J_8 = (\bar{v}' - \tilde{v}') \quad (2.15h)$$

$$J_9 = \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (2.15i)$$

$$J_{10} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (2.15j)$$

$$J_{11} = \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \quad (2.15k)$$

$$J_{12} = \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \quad (2.15l)$$

(2.15) 中的 ( )' 表示計算的座標是加上了水平移速的移動座標，其共有 12 個弱勢約束條件：J<sub>1</sub> 為回波保守(2.15a)，在雷達短時間的密集觀測下，可以假設回波是接近保守的；J<sub>2</sub> 為雷達觀測到的徑向風  $V_r'$  和風場在直角座標上的分量  $u', v', w'$  的關係式(2.15b)，均是在移動座標上計算， $(P'_1, P'_2, P'_3)$  是雷達在移動座標上的位置。J<sub>3</sub> 是連續方程，表示質量保守 (2.15c)；J<sub>4</sub> J<sub>6</sub> 弱水平和弱垂直渦度(2.15d f)，其具有平滑的效果。J<sub>7</sub> 和 J<sub>8</sub> 是 VAD 的分析結果和反演風場的平均風去調整以增加反演的準確度(2.15g h)。J<sub>9</sub> J<sub>12</sub> 是拉普拉斯濾波函數的約束條件，主要是希望能濾掉短波所造成的雜訊，對其空間分佈產生一些平滑的作用，本身並沒有任何的物理意義(2.15i l)。

在 ZG96 中，求取擾動速度的時候是以每個格點進行計算，並且假設一個格點周圍的一個很小的區域內  $u', v', w'$  是不變的，所以僅需要令 J 對於  $u', v', w'$  的微分等於零就可以求解出網格點上的  $u', v', w'$ 。但是也是因為這樣，關於  $u', v', w'$  三個未知數在價值函數中的形式，是沒有辦法考慮到  $\partial u'/\partial x'$ 、 $\partial u'/\partial y'$ 、 $\partial u'/\partial z'$  等未知數微分的量。要解出價值函數(2.15) 式的極小值，需利用疊代法，給定未知變數的初始值以及價值函數之於未知變數的梯度值，決定出使得價值函數達到小值的  $u', v', w'$ ，這種求極小值的方法稱為下降演算法 (descent algorithm)，在 Liou (1999) 中就是用這個方法求取擾動速度，目

前有個現成的電腦程式 VA15AD (Liu and Nocedal 1998) 就提供了這樣的計算功能。

為了求得價值函數  $J$  之於未知數  $u', v', w'$  的梯度值，利用變分分析的計算後，從原本的 (2.15) 可以得到：

$$\begin{aligned}
dJ_{pert} = & \int_T \int_A \int_{\Omega} \left\{ \left[ \mathbf{a}_1 J_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x'} - \mathbf{a}_2 J_2 \frac{x' - p'_1}{r'} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial J_3}{\partial x'} + \mathbf{a}_4 \frac{\partial J_4}{\partial y'} - \mathbf{a}_6 \frac{\partial J_6}{\partial z'} + \mathbf{a}_7 \frac{\partial J_7}{\partial x'^2} + \mathbf{a}_8 \frac{\partial J_8}{\partial y'^2} \right] d\mathbf{u}' \right. \\
& + \left[ \mathbf{a}_1 J_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial y'} - \mathbf{a}_2 J_2 \frac{y' - p'_2}{r'} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial J_3}{\partial y'} - \mathbf{a}_4 \frac{\partial J_4}{\partial x'} - \mathbf{a}_5 \frac{\partial J_5}{\partial z'} + \mathbf{a}_9 \frac{\partial J_9}{\partial x'^2} + \mathbf{a}_{10} \frac{\partial J_{10}}{\partial y'^2} \right] d\mathbf{v}' \\
& + \left. \left[ \mathbf{a}_1 J_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial z'} - \mathbf{a}_2 J_2 \frac{z' - p'_3}{r'} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial J_3}{\partial z'} - \mathbf{a}_5 \frac{\partial J_5}{\partial y'} - \mathbf{a}_6 \frac{\partial J_6}{\partial x'} \right] d\mathbf{w}' \right\} d\Omega dt \\
& + \int_T \int_A \int_{x=x_{left}}^{x=x_{right}} \left[ \left( \mathbf{a}_3 J_3 - \mathbf{a}_7 \frac{\partial J_7}{\partial x'} \right) d\mathbf{u}' + \left( \mathbf{a}_4 J_4 - \mathbf{a}_9 \frac{\partial J_9}{\partial x'} \right) d\mathbf{v}' - \mathbf{a}_6 J_6 d\mathbf{w}' \right] dydz dt \\
& + \int_T \int_A \int_{y=y_{left}}^{y=y_{right}} \left[ \left( -\mathbf{a}_4 J_4 - \mathbf{a}_8 \frac{\partial J_8}{\partial y'} \right) d\mathbf{u}' + \left( \mathbf{a}_3 J_3 - \mathbf{a}_{10} \frac{\partial J_{10}}{\partial x'} \right) d\mathbf{v}' + \mathbf{a}_5 J_5 d\mathbf{w}' \right] dx dz dt \\
& + \int_T \int_A \int_{z=z_{lower}}^{z=z_{upper}} \left[ \mathbf{a}_6 J_6 d\mathbf{u}' - \mathbf{a}_5 J_5 d\mathbf{v}' + \mathbf{a}_3 J_3 d\mathbf{w}' \right] dx dy dt
\end{aligned} \tag{2.16}$$

由於  $dJ$  是由  $d\mathbf{u}'$ 、 $d\mathbf{v}'$ 、 $d\mathbf{w}'$  所組成的，可以表示為下面這公式：

$$\begin{aligned}
dJ_{pert} = & \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial J_{pert}}{\partial u'} d\mathbf{u}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial v'} d\mathbf{v}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial w'} d\mathbf{w}' \right\} dx dy dz \\
& + \iint_A \left( \frac{\partial J_{pert}}{\partial u'} d\mathbf{u}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial v'} d\mathbf{v}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial w'} d\mathbf{w}' \right)_{x=x_{left}}^{x=x_{right}} dy dz \\
& + \iint_A \left( \frac{\partial J_{pert}}{\partial u'} d\mathbf{u}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial v'} d\mathbf{v}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial w'} d\mathbf{w}' \right)_{y=y_{left}}^{y=y_{right}} dx dz \\
& + \iint_A \left( \frac{\partial J_{pert}}{\partial u'} d\mathbf{u}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial v'} d\mathbf{v}' + \frac{\partial J_{pert}}{\partial w'} d\mathbf{w}' \right)_{z=z_{lower}}^{z=z_{upper}} dx dy
\end{aligned} \tag{2.17}$$

比較 (2.15) 和 (2.16)，可以導出在反演範圍內每個格點上的價值函數  $J$  之於未知數  $u', v', w'$  的梯度為：

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T \left[ \mathbf{a}_1 J_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x'} - \mathbf{a}_2 J_2 \frac{x' - p'_1}{r'} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial J_3}{\partial x'} + \mathbf{a}_4 \frac{\partial J_4}{\partial y'} - \mathbf{a}_6 \frac{\partial J_6}{\partial z'} + \mathbf{a}_7 J_7 + \mathbf{a}_9 \frac{\partial J_9}{\partial x'^2} + \mathbf{a}_8 \frac{\partial J_8}{\partial y'^2} \right] dt$$



(2.18)

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T \left[ \mathbf{a}_1 J_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial y'} - \mathbf{a}_2 J_2 \frac{y' - p'_2}{r'} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial J_3}{\partial y'} - \mathbf{a}_4 \frac{\partial J_4}{\partial x'} - \mathbf{a}_5 \frac{\partial J_5}{\partial z'} + \mathbf{a}_8 J_8 + \mathbf{a}_{11} \frac{\partial J_{11}}{\partial x'^2} + \mathbf{a}_{12} \frac{\partial J_{12}}{\partial y'^2} \right] dt \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w'} = \int_T \left[ \mathbf{a}_1 J_1 \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial z'} - \mathbf{a}_2 J_2 \frac{z' - p'_3}{r'} - \mathbf{a}_3 \frac{\partial J_3}{\partial z'} - \mathbf{a}_5 \frac{\partial J_5}{\partial y'} + \mathbf{a}_6 \frac{\partial J_6}{\partial x'} \right] dt \quad (2.20)$$

邊界則需要特別處理，共有六個邊界要分開計算：

當  $x = x_{left}$

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T \left( -\mathbf{a}_3 J_3 + \mathbf{a}_7 \frac{\partial J_7}{\partial x'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T \left( -\mathbf{a}_4 J_4 + \mathbf{a}_7 \frac{\partial J_9}{\partial x'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial w'} = \int_T \mathbf{a}_6 J_6 dt$$

當  $y = y_{left}$

$$\frac{\partial J}{\partial t'} = \int_T \left( \mathbf{a}_4 J_4 + \mathbf{a}_8 \frac{\partial J_8}{\partial y'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T \left( -\mathbf{a}_3 J_3 + \mathbf{a}_{10} \frac{\partial J_{10}}{\partial x'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial w'} = \int_T -\mathbf{a}_5 J_5 dt$$

當  $z = z_{bottom}$

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T -\mathbf{a}_6 J_6 dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T \mathbf{a}_5 dt$$

當  $x = x_{right}$

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T \left( \mathbf{a}_3 J_3 - \mathbf{a}_7 \frac{\partial J_7}{\partial x'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T \left( \mathbf{a}_4 J_4 - \mathbf{a}_7 \frac{\partial J_9}{\partial x'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial w'} = \int_T -\mathbf{a}_6 J_6 dt$$

當  $y = y_{right}$

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T \left( -\mathbf{a}_4 J_4 + \mathbf{a}_8 \frac{\partial J_8}{\partial y'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T \left( \mathbf{a}_3 J_3 + \mathbf{a}_{10} \frac{\partial J_{10}}{\partial x'} \right) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial w'} = \int_T \mathbf{a}_5 J_5 dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T -\mathbf{a}_3 J_3 dt$$

當  $z = z_{top}$

$$\frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T \mathbf{a}_6 J_6 dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial v'} = \int_T -a_5 dt \qquad \frac{\partial J}{\partial u'} = \int_T a_3 J_3 dt$$

經由上面這些式子可以算出內部格點和邊界上每一點的價值函數  $J$  之於  $u', v', w'$  的梯度值，接下來只要決定初始猜測值，便可以利用前面所提到的 VA15AD 這電腦程式來找出一組新的  $u', v', w'$ ，再利用迴圈的方式把新算出來的  $u', v', w'$  再代入 VA15AD 中，直到找到一組最佳的  $u', v', w'$ ，使得  $\partial J/\partial u'$ 、 $\partial J/\partial v'$ 、 $\partial J/\partial w'$  低於門檻值（如 0.001），讓價值函數的值趨近於穩定且最小。最後將求得的擾動速度場  $u', v', w'$  和最初求得的移動座標移速  $U$ 、 $V$ 、 $W$  加起來，就是最終的結果，一個利用雷達觀測資料反演得到的真實風場。

## 2.6 將 L99 推廣到三維的空間

在前人做的反演研究中，不論是伴隨法、雙純量保守法或者本篇所使用的移動座標法，都只是反演一個平面的風場，那麼是否能夠反演一個三維體積的風場？移動座標是不是不需要局限在一平面移動而是在一個三度空間移動？也就是說移動座標的移速包含了  $U$ 、 $V$ 、 $W$  三個分量。原來的 (2.6) 修改如下：

$$\begin{cases} x' = x - U(t - t_0) \\ y' = y - V(t - t_0) \\ z' = z - W(t - t_0) \\ t' = t \end{cases} \quad (2.21)$$

為了方便計算並且突顯出反演的過程是在網格點上計算的特性，於是把積分符號  $\iiint$  用  $\sum \sum \sum$  替換掉，(2.15) 便可以改寫成下式：

$$J_{pert} = \sum_{t=2}^{m-1} \sum_{k=2}^{n_x-1} \sum_{i=2}^{n_x-1} \sum_{j=2}^{n_y-1} \left[ \sum_{n=1}^{17} a_n(t, k, i, j) J_n(t, k, i, j)^2 \right] \quad (2.22)$$

其中每一項約束條件改寫如下：

$$J_1(t, k, i, j) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{h}'(t+1, k, i, j) + \mathbf{h}'(t-1, k, i, j)}{2\Delta t} \\ + u'(k, i, j) \frac{\mathbf{h}'(t, k, i+1, j) + \mathbf{h}'(t, k, i-1, j)}{2\Delta x'} \\ + v'(k, i, j) \frac{\mathbf{h}'(t, k, i, j+1) + \mathbf{h}'(t, k, i, j-1)}{2\Delta y'} \\ + w'(k, i, j) \frac{\mathbf{h}'(t, k+1, i, j) + \mathbf{h}'(t, k-1, i, j)}{2\Delta z'} \end{array} \right]$$

$$J_2(t, k, i, j) = V_r' - u'(k, i, j) \frac{x'(t, k, i, j) - p_1'}{r'} - v'(k, i, j) \frac{y'(t, k, i, j) - p_2'}{r'} \\ - w'(k, i, j) \frac{z'(t, k, i, j) - p_3'}{r'}$$

$$J_3(k, i, j) = \left[ \begin{array}{l} \frac{u'(k, i+1, j) - u'(k, i-1, j)}{2\Delta x'} + \frac{v'(k, i, j+1) - v'(k, i, j-1)}{2\Delta y'} \\ + \frac{w'(k+1, i, j) - w'(k-1, i, j)}{2\Delta z'} \end{array} \right]$$

$$J_4(k, i, j) = \left[ \frac{u'(k+1, i, j) - u'(k-1, i, j)}{2\Delta z'} - \frac{w'(k, i+1, j) - w'(k, i-1, j)}{2\Delta x'} \right]$$

$$J_5(k, i, j) = \left[ \frac{w'(k, i, j+1) - w'(k, i, j-1)}{2\Delta y'} - \frac{v'(k+1, i, j) - v'(k-1, i, j)}{2\Delta z'} \right]$$

$$J_6(k, i, j) = \left[ \frac{v'(k, i+1, j) - v'(k, i-1, j)}{2\Delta x'} - \frac{u'(k, i, j+1) - u'(k, i, j-1)}{2\Delta y'} \right]$$

$$J_7(k) = [\bar{u}'(k) - \tilde{u}'(k)] \quad J_8(k) = [\bar{v}'(k) - \tilde{v}'(k)]$$

$$J_9(k, i, j) = \frac{u'(k, i+1, j) - 2u'(k, i, j) + u'(k, i-1, j)}{\Delta x'^2}$$

$$J_{10}(k, i, j) = \frac{u'(k, i, j+1) - 2u'(k, i, j) + u'(k, i, j-1)}{\Delta y'^2}$$

$$J_{11}(k, i, j) = \frac{u'(k+1, i, j) - 2u'(k, i, j) + u'(k-1, i, j)}{\Delta z'^2}$$

$$J_{12}(k, i, j) = \frac{v'(k, i+1, j) - 2v'(k, i, j) + v'(k, i-1, j)}{\Delta x'^2}$$

$$J_{13}(k, i, j) = \frac{v'(k, i, j+1) - 2v'(k, i, j) + v'(k, i, j-1)}{\Delta y'^2}$$

$$J_{14}(k, i, j) = \frac{v'(k+1, i, j) - 2v'(k, i, j) + v'(k-1, i, j)}{\Delta z'^2}$$

$$J_{15}(k, i, j) = \frac{w'(k, i+1, j) - 2w'(k, i, j) + w'(k, i-1, j)}{\Delta x'^2}$$

$$J_{16}(k, i, j) = \frac{w'(k, i, j+1) - 2w'(k, i, j) + w'(k, i, j-1)}{\Delta y'^2}$$

$$J_{17}(k, i, j) = \frac{w'(k+1, i, j) - 2w'(k, i, j) + w'(k-1, i, j)}{\Delta z'^2}$$

利用變分分析推導價值函數 ( 2.22 ) 中 J 之於未知數  $u', v', w'$  的梯度，其過程、結果及邊界條件請參考附錄 A

## 2.7 權重的分配方法

每項約束條件所算出來的數量級並不相同，使得對價值函數 ( 2.22 ) 的貢獻也不同，所以在價值函數中每項約束條件都要再乘上一個權重函數，以使得每項條件在價值函數中所做的貢獻都相同。

最佳的權重函數即為每一項約束條件大小的倒數，能夠使每一項算出來的結果都會接近於 1，代表每一項條件在價值函數中所做的貢獻都相同。

由於  $u'$ 、 $v'$ 、 $w'$  是未知的變數，使得權重函數沒有辦法明確的得到其大小，只能以現有的雷達觀測資料進行估計。估計的方法是利用雷達觀測到的徑向風和回波的值，若約束條件中只有未知數  $u'$ 、 $v'$ 、 $w'$  而沒有觀測到的變數可用，則可以利用徑向風  $V_r$  投影到  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的分量做為  $u'$ 、 $v'$ 、 $w'$  的估計值，在公式中以  $u''$ 、 $v''$ 、 $w''$  表示，則  $a_1$  -  $a_6$  可定義如下：

$$\mathbf{a}_1(t) = \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{t=2}^{nt-1} \sum_{k=2}^{nx-1} \sum_{i=2}^{ny-1} \sum_{j=2}^{nz-1} \left[ \frac{\mathbf{h}(t+1, k, i, j) - \mathbf{h}(t-1, k, i, j)}{2\Delta t'} + u''(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i+1, j) - \mathbf{h}(t, k, i-1, j)}{2\Delta x'} + v''(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i, j+1) - \mathbf{h}(t, k, i, j-1)}{2\Delta y'} + w''(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k+1, i, j) - \mathbf{h}(t, k-1, i, j)}{2\Delta z'} \right] \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{a}_2(t) = \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{t=1}^{nt} \sum_{k=1}^{nx} \sum_{i=1}^{ny} \sum_{j=1}^{nz} \left[ V_r'(t, k, i, j) - u''(t, k, i, j) \frac{x'(k, i, j) - p_1'(t, k, i, j)}{r'(k, i, j)} - v''(t, k, i, j) \frac{y'(k, i, j) - p_2'(t, k, i, j)}{r'(k, i, j)} - w''(t, k, i, j) \frac{z'(k, i, j) - p_3'(t, k, i, j)}{r'(k, i, j)} \right] \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{a}_3 = \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{nz} \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \left[ \frac{u''(k, i+1, j) - u''(k, i-1, j)}{2\Delta x} + \frac{v''(k, i, j+1) - v''(k, i, j-1)}{2\Delta y} + \frac{W_t(k+1, i, j) - W_t(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{a}_4 = 0.01 \times \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{nz} \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \left[ \frac{u''(k+1, i, j) - u''(k-1, i, j)}{2\Delta z} - \frac{w''(k, i+1, j) - w''(k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{a}_5 = 0.01 \times \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{nz} \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \left[ \frac{w''(k, i, j+1) - w''(k, i, j-1)}{2\Delta y} - \frac{v''(k+1, i, j) - v''(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{a}_6 = 0.01 \times \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{nz} \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \left[ \frac{u''(k, i+1, j) - u''(k, i-1, j)}{2\Delta x} - \frac{v''(k, i, j+1) - v''(k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \right\}^{-1}$$

其中 $\Omega$ 為反演範圍的網格點的總數， $nt$ 、 $nx$ 、 $ny$ 、 $nz$ 分別表示時間數及 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向的網格點數。在(2.22)中，加入 $J_4$ 、 $J_5$ 、 $J_6$ 這三項的目的是為了做平滑的作用，其權重係數不宜太大，所以這三項的權重值為前三項的百分之一。

加入 $J_7$ 、 $J_8$ 這兩項的作用主要是希望藉由VAD風剖面來反演出來的水平風平均產生約束作用，以增加反演的準確度(羅，2000)，但

是在本篇研究中因為並沒有 VAD 的產品，所以並不使用  $J_7$ 、 $J_8$  這兩項條件，於是：

$$\mathbf{a}_7 = \mathbf{a}_8 = 0$$

$\mathbf{a}_9$   $\mathbf{a}_{17}$  這幾項為高階空間平滑函數的權重，因為  $u'$ 、 $v'$ 、 $w'$  為未知數而沒有辦法直接的估算出來。但是經過大概的估算，為了濾掉波長小於 2 公里的短波所造成的雜訊 (Testud and Chong, 1983)，其大小約為：

$$\mathbf{a}_9 = \mathbf{a}_{10} = \mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_{13} = \mathbf{a}_{14} = \mathbf{a}_{15} = \mathbf{a}_{16} = \mathbf{a}_{17} = 10^5$$

## 第三章 利用簡單的平流模式驗證

### 3.1 簡單的平流模式

為瞭解 L99 這方法反演垂直風場的可行性如何，需要進行測試，測試的方法為虛擬一個反演的範圍，給定一個理想的回波場和風場，將風場利用 (2.9) 式投影到雷達的徑向方向模擬雷達觀測到的徑向風，以此進行反演。

為了配合雷達的掃瞄策略模擬出回波場隨風場變化的情況，使用了簡單的二維平流方程式，給定一個並不隨時間改變的理想風場，再使用以下之平流方程預報回波：

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1,k,i} - F_{n-1,k,i}}{2\Delta t} = & -u \left( a \frac{F_{n,k,i+1} - F_{n,k,i-1}}{2\Delta x} + b \frac{F_{n,k,i+2} - F_{n,k,i-2}}{4\Delta x} \right) \\ & -w \left( a \frac{F_{n,k+1,i} - F_{n,k-1,i}}{2\Delta z} + b \frac{F_{n,k+2,i} - F_{n,k-2,i}}{4\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中  $a = 4/3$ 、 $b = -1/3$ ，時間的插分是使用跳蛙法，空間上的插分是使用 Fourth-order differencing ( Haltiner and Williams, 1983 )。此模式的網格是 xz 方向所構成的平面，大小為 73x73，網格間距  $dx=1\text{km}$ 、 $dz=0.5\text{km}$ ，(3.1) 中的  $t$  為 1 秒鐘，取出第 0 秒、第 180 秒和第 360 秒的值做為模擬雷達連續三次體積掃瞄得到的結果，雷達則置於 (48, -50) 的位置，即模擬雷達是往北方掃瞄，利用 (2.9) 得到雷達的徑向風場。

### 3.2 簡單平流方程式模擬雷達觀測的反演結果

模擬過程如第 3.1 節所述，圖 3.1 和圖 3.2 為模擬的回波場以及徑向風場，圖 3.3 和圖 3.5 為模擬的  $u$ 、 $w$ ，而圖 3.4 圖 3.6 為反演的結果，將理想風場與反演得到的風場進行比對，可以看出的  $u$ 、 $w$  大約的特徵，如極值的位置，正區負區的分佈情形，與理想風場相似。

圖 3.7 和圖 3.8 則分別是模擬和反演得到的  $u$  和  $w$  合成向量場，互相比較也可以看出反演得到的風場結構與模擬的風場結構十分相似，如圖 3.7 有一渦旋於左上角，在圖 3.8 也可以明顯的看出來。由這樣的結果可以初步的認為，反演垂直方向的風場是可行的方法。



## 第四章 利用 RAMS model 進行反演的實驗

### 4.1 利用 RAMS model 模擬雷達的觀測

為了做更精確更完整的測試，且為了把反演的範圍從二維的平面推廣到三維的體積，需要一個更精確的模式去模擬一個會隨著時間改變的風場，於是採用了 RAMS model。

用 RAMS model 模擬一個下爆流 (down burst): 在一個三維 61 (x) 61 (y) 23 (z) 網格中，網格間距 x 和 y 方向為 1 公里，z 方向為 0.5 公里。初始條件放置一個溫度擾動，擾動中心於高度 4 公里，x 和 y 座標為 30 的地方，溫度為 -4 度，並且溫度隨著遠離此點而逐漸升高，隨著時間的積分，空氣塊會由高空向地表潰散延伸出去，形成下爆流。最後的結果就可以得到風場和回波場隨時間變化的情形。

測試的方式是固定一個掃瞄策略，如掃瞄時間為 1 分鐘、3 分鐘或 6 分鐘，利用模式模擬出時間間隔為 1 分鐘、3 分鐘或 6 分鐘的理想回波場和徑向風場，通常一座雷達最快的掃瞄速度大約是 1 分鐘，而一般的掃瞄策略約 6 分鐘左右。在固定的掃瞄策略下改變雷達位置與反演區域的距離，分別是 50 公里、100 公里、150 公里於反演區域的正南方，通常一座雷達的掃瞄半徑在 250 公里到 500 公里之間，故選取 50 公里、100 公里、150 公里以使得反演的區域都能夠在雷達觀測的範圍內。決定雷達位置後，測試當系統無移速、系統移速為 5m/s 朝東、系統移速為 5m/s 朝北時。

將模式的風場依照所要求的掃瞄策略，取出合乎要求的時間間隔的風場資料，投影到雷達的徑向方向做為模擬雷達的徑向風，以其進行反演。其反演結果再與模式模擬結果之間的各種誤差做比較。所有測試的方法與誤差詳細的條列於表 1，實驗編號中 A、B、C 表示掃瞄策略為 1 分鐘、3 分鐘、6 分鐘，50、100、150 為距離 50 公里、100 公里和 150 公里。U5 為系統移速為  $U=5\text{m/s}$ ，V5 為系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，

N 為無系統移速。

在本研究的實驗中，雷達均位於反演區域的正南方，故所反演得到風場的 u 分量，為切向風的方位角分量，而風場的 w 分量，則近似於切向風的仰角分量，風場的 v 分量則是十分接近雷達的徑向風。

## 4.2 誤差的計算

理想風場與反演的風場進行比較時，利用下列幾個誤差計算的方式做為分析比較的根據，分別是均方根強度 (Root Mean Square Magnitude, RMSM)、均方根誤差 (Root Mean Square Error, RMSE)、相對均方根誤差 (Relative Root Mean Square Error, RRMS) 相關係數 (SCC)：

$$RMSM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (A)^2} \quad (4.1)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (A_{re} - A_{tr})^2} \quad (4.2)$$

$$RRMS = \frac{\sqrt{\sum (A_{re} - A_{tr})^2}}{\sqrt{\sum (A_{tr})^2}} \quad (4.3)$$

$$SCC = \frac{\sum (A_{re} - \bar{A}_{re})(A_{tr} - \bar{A}_{tr})}{\sqrt{\sum (A_{re} - \bar{A}_{re})^2 \sum (A_{tr} - \bar{A}_{tr})^2}} \quad (4.4)$$

其中 A 表示任一種所要比較的變數， $( )_{re}$  是表示反演得到的結果， $( )_{tr}$  表示模式所模擬出來的結果， $\bar{A}$  代表平均值，也就是模式所模擬的結果。

## 4.3 實驗一：RAMS model 模擬雷達觀測的反演結果

實驗一的結果詳列於表 1，目的是為了探求此方法的反演能力如何。以表 1 中的 B100N 為例：從 RMSE 和 RRMS 來看，u 的誤差最大，RMSE 達到 0.56m/s, RRMS 有 0.74; v 的誤差最小, RMSE 只有 0.12m/s, RRMS 也只有 0.16; w 反演的誤差則介於 u 和 v 之間，RMSE 和 RRMS

分別為 0.34m/s 和 0.47。從 SCC 來看，u 為 0.81 較差，v 達 0.98 最好，w 介於兩者之間，達 0.92。為了了解反演的風場的實驗風速大約多大，在表 1 中列有 RMSM 值供參考，在無系統移速時，模式模擬的 u、v、w 均在 0.75m/s 左右。而反演的 RMSM 與其比較可以大概了解其反演的能力為何。以 B100N 為例，其 u 反演的 RMSM 值為 0.53m/s，而 u 模式模擬的 RMSM 值為 0.75m/s，這樣可以大概評估反演的能力大約可還原真實的風場約七成。

圖 4.1 和圖 4.2 為 B100N 實驗的初始回波場和徑向風場，是由數值模式得到的，取高度 Z=11 的平面，此高度正好是模式高度的一半，回波場為一同心圓的形式，極大值為一環狀分布於距圓心 5 到 10 公里之間，徑向風場則是北邊為負值，南邊為正值，並且南北個一極值呈對稱的分布，配合回波的分布可猜測此風場為一向中心輻合的形式。

圖 4.3 為模式模擬的 u 取高度 Z=11 的水平面，分佈的形式是以圖中心 X=30 一條貫穿南北的零值線為界，東西各有一極值且對稱分布，表示此風場為東西向中心輻合。圖 4.4 為反演得到的 u，極值的位置與圖 4.3 相似，東西個一個呈對稱狀，但零值線的分佈並不規則，且極值與圖 4.3 比較會有低估的現象。

圖 4.5 為模式模擬的 v 取高度 Z=11，分布的情形與圖 4.2 中徑向風的分布類似，以 Y=30 為的零值線為界南北對稱分布，表示此風場為南北向中心輻合。圖 4.6 是反演得到的 v，其分布情況與圖 4.5 極為相似，極值的位置與大小也很準確的反演出來。

圖 4.7 為模擬的 w 取高度 Z=11 的位置，為一同心圓的分布，極小值 -2m/s 在圓心向外遞增，極大值 0.5 距圓心 15 公里呈環狀分布。由於 w 的正值表示上升，負值表示下沉，從圖 4.7 則可以看出垂直速度的分布在圓心是下沉氣流，但是在圓心的四週有上升氣流。圖 4.8 為反演得到的 w，同樣是同心圓的分布，在圓內是下沉氣流，圓心的四週有上升氣流，與圖 4.7 比較最大的差異是，反演風速的極值小偏離了圓心位置。

圖 4.9 為模擬的  $u$  在  $y=30$  時的垂直剖面，此位置是對照圖 4.3 取  $u$  梯度最大的方向而決定的。此圖以  $X=30$  左右對稱的圖形，以  $Z=4$  分為上下兩部份，在  $Z<4$  的位置，西邊為負，東邊為正，表示此層為東西方向向外輻散的風場。而  $Z>4$  則相反，西邊為正東邊為負，表示風場東西方向朝中心輻合。圖 4.10 為反演的  $u$ ，同樣也可以看出在接近下邊界的地方有輻散，中高層有輻合，但是與圖 4.9 比較，極值的位置及大小就有明顯的不同，也沒有像圖 4.9 那麼樣的對稱。

圖 4.11 為模擬的  $v$  在  $x=30$  時的垂直剖面，此位置對照圖 4.5 取  $v$  梯度最大的方向。分布的形式與圖 4.9 幾乎完全一樣，只是輻合輻散的方向不一樣，底層是南北方向的輻散，中高層是南北方向的輻合。圖 4.12 為反演得到的  $v$ ，分布的形式與圖 4.11 幾乎完全想同，只是極值的大小有些微的差異。

圖 4.13 為模擬  $w$  在  $y=13$  時的垂直剖面，因為  $w$  在水平方向梯度朝每一個方向都是相同的，故取與圖 4.9 相同位置的垂直剖面。垂直速度的分布，在  $X=20$  40 的地方是負值，為下沉運動，並在  $X=25$  和  $X=35$  高度在  $Z=2$  8 的地方有極值，表示下降速度為最大。在  $X<25$  和  $X>35$  的地方則是正值，表示為上升氣流。圖 4.14 為反演的  $w$ ，分布與圖 4.13 差異不大，但在  $X=25$  和  $X=35$  出現的極值有低估的現象，在  $X=30$ ，高度  $Z>12$  的位置出現了微弱的正值，這是模式中所沒有出現的。

圖 4.15 和圖 4.16 為  $u$  和  $w$  模式和反演的合成向量，是取  $Y=30$  的剖面，為的是要比較  $xz$  平面反演的情形。圖 4.15 和圖 4.16 均可以看出在  $X=20$  和  $X=40$  高度在  $Z=4$  左右的位置，分別有順時針和逆時針旋轉的渦旋，不過圖 4.16 中下沉的速度比模擬的要大一些，而且在  $X=30$ ，高度  $Z>12$  的位置出現了上升氣流，而圖 4.15 中則是非常的不明顯。

圖 4.17 和圖 4.18 為  $v$  和  $w$  模式和反演的合成向量，是取  $X=30$  的剖面，圖 4.17 和圖 4.15 完全一樣，因為此下爆流為一對稱的形式往四方潰散。反演的結果比較，圖 4.18 會比圖 4.16 看起來更接近模

式模擬的結果。

圖 4.19 和圖 4.20 為在高度  $Z=11$  模擬和反演的水平輻合輻散場，圖 4.21 和 4.22 為高度  $Z=2$  模擬和反演的水平輻合輻散場。輻合輻散的量為風場經過一次微分的結果是十分微小且敏感的數值，很難去做定量上的統計，但是可以用來做定性的分析。在圖 4.19，中心的部份為負值，表示輻合，圖 4.21 中心為正值，為輻散，與模式所模擬的下衝流風場的特徵吻合，而且圖 4.20 和圖 4.22 也同樣的可以看出這些特徵。

實驗一的結果証實了利用移動座標法反演風場空間的分布是可行的。綜合 RMSE、RRMSE、SCC 等統計的結果，以及利用風場垂直和水平的剖面圖相互比較，可以証實了此方法確實有不錯的反演能力，特別是對  $w$  的反演，雖然沒有如  $v$  那麼好，但是 SCC 仍可以達到 0.9 以上，與前人所做的結果比較起來算是不錯。

#### 4.4 實驗二：系統具有移速

移動座標移速的計算主要是跟回波的移動有關，與徑向風沒有關係，所以與雷達距離反演位置的遠近無關，只跟雷達的掃瞄策略有關。表 2 為摘錄表 1 中的部份結果做為實驗 2 的探討。比較 A100N 和 A100U5，無系統移速和有系統移速  $U=5\text{m/s}$  比較，兩者的差異性並不會很大，唯一會有改變的是  $u$  的 RRMSE 變得很小。A100N 和 A100U5 中  $u$  的 RMSE 的為  $0.68\text{m/s}$  和  $0.81\text{m/s}$ ，但是反演的 RMSM 分別為 0.48 和 5.12，所以計算有系統移速  $U=5\text{m/s}$ ， $u$  的 RRMSE 算出來會很小。同樣的比較 A100N 和 A100V5 之間的差異，可以看出  $v$  的 RMSE 並沒有相差太大，但是 A100V5 的 RRMSE 為 A100N 的約五分之一。

圖 4.23 為模式模擬一有系統移速的  $u$ ，高度取  $Z=11$ ，在  $X=35$  為分界，呈左右對稱的形式。在  $X>35$  側有極小值，在  $X<35$  側有極大值，但是所有的數值均大於 0。風場的分布形態與無系統移速的圖 4.3 的相似，但是所有的數值均比圖 4.3 增加了  $5\text{m/s}$ ，且極值的位置向右偏移。表示風速雖然都是向東，但是在  $X=35$  有個相對輻合的情形。

圖 4.24 是反演得到的  $u$ ，同樣以  $X=35$  的位置為對稱軸東西對稱，極值的位置與圖 4.23 相近，但是有低估的情形。

圖 4.25 為模式模擬一有系統移速  $U=5\text{m/s}$  的  $v$ ，以  $Y=30$  分界，上方為正，南方為負，各有一極值，但因為有系統移速的關係，極值在出現在  $X=35$  的地方，比圖 4.4 偏東邊，所以圖 4.19 表示在  $Y=30$  的地方有一南北方向的輻合，輻合量最大的地方出現在  $X=35$  的位置。圖 4.26 為  $v$  反演的結果，與圖 4.25 極為相似，同樣是南北方向的輻合，輻合量最大的地方出現在  $X=35$  的位置，只是風速的極值有些許低估。

圖 4.27 為模式模擬的有一系統移速  $U=5\text{m/s}$  的  $w$  速度，分布情形與無系統移速時相同為一同心圓，中心為負值，距圓心  $15\text{km}$  之外則為正，只是圓心的位置並不是在整個反演範圍的正中間，而偏東邊， $X=35$  的地方。圖 4.28 為反演的  $w$ ，風速的分布與圖 4.27 極為相似，為一同心圓，只是反演的結果極值的位置有點偏離圓心。

圖 4.29 和圖 4.30 為模式模擬和反演的  $u$ 、 $v$  合成的向量場，高度  $Z=11$ ，兩張圖幾乎一模一樣，所有的風向都指向東方，但是  $X=30$  到  $X=50$  的地方，發現風向都會朝  $Y=30$  輻合。

圖 4.31 為模式模擬一有系統移速的  $u$ ， $Y=30$  的剖面。風場的分布是以  $X=35$  為中心左右對稱，並且以  $Z=4$  分為上下兩部份，在  $Z<4$  的位置，西邊為風速小於  $5.0\text{m/s}$ ，東邊為風速大於  $5.0\text{m/s}$ ，表示此層有個相對向外的輻散。而  $Z>4$  則相反，西邊為大於  $5.0\text{m/s}$  東邊為小於  $5.0\text{m/s}$ ，表示風場東西方向的輻合。圖 4.32 為反演的  $u$ ，同樣也可以看出底層輻散，高層輻合的形式，但是極值的位置，大小都會模擬的情況有些差異。

圖 4.33 模擬有系統移速的  $v$  在  $x=30$  時的垂直剖面。分布的形式與圖 4.11 幾乎完全一樣，底層是南北方向的輻散，中高層是南北方向的輻合。圖 4.34 為反演得到的  $v$ ，分布的形式與圖 4.29 幾乎完全想同，只是極值的大小有些微的差異。

圖 4.35 是模擬有系統移速的  $w$  在  $Y=30$  時的垂直剖面。以  $X=35$  為中心左右對稱。垂直速度的分布，接近系統中心的部份是負值，為下沉運動，並且有左右兩個對稱的極值，在  $X=30$  和  $X=40$  高度在  $Z=28$  的地方，表示下降速度為最大。在  $X<25$  和  $X>45$  的地方為上升氣流。圖 4.36 為反演的  $w$ ，分布與圖 4.35 差異不大，但在極值的地方有低估的現象，高層靠近系統中心的位置出現了微弱的正值，這是模式中所沒有出現的。

圖 4.37 和圖 4.38 為  $u$  和  $w$  模式和反演的合成向量，系統具有  $U=5\text{m/s}$  的移速，是取  $Y=30$  的剖面，風的方向大多往東方，在  $X=30$  到  $50$  的位置有明顯的下沉氣流，在圖 4.38 中在  $X=35$ ，高度  $Z>12$  的位置出現了風向向上的分量，而圖 4.37 中則是非常的不明顯。

圖 4.39 和圖 4.40 分別是在系統有移速  $V=5\text{m/s}$  時模擬和反演在  $Z=11$  的  $u$ ，可以發現整個系統因移速的關係向北方偏移了。反演和模式模擬的差異並不大，只是反演的結果等值線的分布比較廣且稀疏，可能反演的結果有些低估。

圖 4.41 和圖 4.42 為系統有移速  $V=5\text{m/s}$  時模擬和反演得到在  $Z=11$  的  $v$ 。由於  $v$  的方向和系統移速相同，所以所有的等值線均為正值，並且整個系統以  $Y=35$  的位置為分界南北對稱分布各有一極值，北方為極小值，南方為極大值，表示有南北向中心輻合的趨勢。

圖 4.43 和圖 4.44 為系統有移速  $V=5\text{m/s}$  時模擬和反演得到在  $Z=11$  的  $w$ ，分布的情形是大約以  $(30, 35)$  為中心的一個同心圓。靠近圓心的部份為負值，表示為下沉氣流，外圈的部份則是有微小的正值，表示有微弱的上升氣流。反演的結果與模擬的結果十分相似，靠近圓心為負值，為下沉氣流，最大的差別是在極值的部份，反演的極值位置不同於模擬是在圓心的位置而有偏離。

圖 4.45 是模式模擬  $u$  在系統有移速  $V=5\text{m/s}$  時，在  $Y=30$  的垂直剖面，圖 4.46 則是反演的結果， $u$  並沒有受到系統移速的影響，與無系統移速的分布相同，為底層輻散，中高層輻合的分布，反演的結

果依然也有這樣的分布。

圖 4.47 是模式模擬的  $v$  在系統有移速  $V=5\text{m/s}$  時，在  $X=30$  的垂直分布，因為受到系統移速的影響所以系統的位置往北偏移，且等值線均大於 0，但是從等值線的分布仍可以看出下爆流底層輻散中高層輻合的特徵，而圖 4.48 是反演的結果，與圖 4.47 比較相似度極高。

圖 4.49 和圖 4.50 是垂直速度的分布，有  $V=5\text{m/s}$  的系統移速，在位置  $X=30$  的垂直剖面，圖 4.49 是模擬的垂直風場，系統因受到移速的影響偏向北方，但是等值線的分布仍是中心的部份是下沉氣流，有兩個極值，四週則是有上升氣流，圖 4.50 是反演的結果，前述的特徵均有反演出。

圖 4.51 和圖 4.52 為在  $X=30$  位置  $v$  和  $w$  的合成向量垂直剖面，圖 4.51 為模式的結果，整個風場均吹北風，但是在下爆流發生的位置仍可以看到風場有向下的分量，和在底層因向四週潰散所捲起的渦旋，圖 4.52 是反演的結果，同樣的均是吹北風，且亦能夠很明確的看出下爆流發生的位置以及如同前述的特徵。

#### 4.5 實驗三：雷達與反演區塊的距離

比較表 3 中 A50N、A100N、A150N。從相關係數來看，雷達距離的遠近似乎對於 SCC 並沒有很明顯的影響。發現在距離 100 公里的地方，有稍好的相關性， $u$  的 SCC 為 0.68， $w$  的 SCC 為 0.92，均比在距離 50 公里和 150 公里時好。而觀察 RMSE 或 RRMSE， $u$  的反演和  $w$  的反演則是有距離愈遠愈差的傾向，但是差別很小。

雷達距離愈遠，同樣的位置被雷達觀測所需要的仰角愈小。仰角愈小， $w$  的貢獻則很小，所以  $w$  會因為雷達距離愈遠誤差會增加。而  $v$  的誤差沒有因雷達距離增加而減少，本實驗設計為往北方掃瞄，則大部分的  $v$  都在雷達的徑向方向，大部分的資訊被雷達所觀測到，且在價值函數中，使用了 (2.9) 這項約束條件，所以  $v$  會有比較小的誤差並不會受到雷達距反演距離的影響。類似前述的理由，距離愈遠對於同區域的掃瞄所需的方位角愈小， $u$  被雷達觀測到的資訊就變得



更少，所以反演的結果會隨著距離愈遠而誤差愈大。

#### 4.6 實驗四：掃瞄策略

比較表 4 中 A100N 實驗、B100N 和 C100N 發現，1 分鐘、3 分鐘和 6 分鐘的掃瞄策略，除了移動座標移速有些許不同外，其他並沒有太大的差別，很難整理出一個規則說明，到底時間短的掃瞄策略有怎麼樣的優點，或是掃瞄策略時間長有怎麼樣的好處。這可能是因為這是模式模擬出來的理想個案，模式的風場完全滿足流體力學方程組的動力模式 ( Navier – Stokes ' Equations )，回波也完全的保守，且使用了移動座標，所以掃瞄時間的長短對反演的結果並沒有明顯的影響。

## 第五章 結論與展望

本研究依據 Gal-Chen (1982) 提出的移動座標的概念，以 Liou (1999) 改善 ZG96 而成的 L99 為基礎，進行單雷達反演的測試，並且將反演的範圍從原本二維的平面推廣到三維的空間。

本研​​究所得到的結果可以歸納如下：

1. 移動座標在 ZG96、L99 及 Liou and Luo (2001) 中均只考慮水平方向的平移。為了反演出垂直面上的風場，將移動座標改成是垂直方向的平移，利用簡單的平流模式去測試，發現亦能夠順利的得到反演的結果。
2. 將前一項原本只是反演二維的垂直平面的方法，推廣成反演三維空間的風場，而且是在一次的計算中得到  $u$   $v$   $w$  利用 RAMS model 模擬一理想風場進行測試，發現反演三維空間上的風場亦是可行的方法。
3. 由實驗一的結果，得知風場的反演中， $u$  (雷達切向風的方位角分量) 反演的結果，誤差最大； $v$  (近似雷達的徑向風) 反演的結果誤差最小，且 SCC 達到 0.98 以上； $w$  (近似雷達切向風的仰角分量) 的誤差則是介於  $u$  和  $w$  之間。
4. 本方法對於垂直速度有比較好的反演，從表 1 可以看出  $w$  反演的 SCC 均達 0.9 以上，與 Xu, et al. (2001) 利用 Simple Adjoint 方法，以 Phoenix II 實驗的資料做驗證以及 Gao, et al. (2002) 利用同樣的方法反演垂直風場，利用 ARPS Model 的模擬做驗證，有更好的結果。
5. 有無系統移速，對於反演的品質並沒有太大的影響，且使用移動座標可以準確的估計系統的移速，能夠大大的減少相對誤差。
6. 雷達與反演區域的距離遠近進行測試，發現距離愈遠對於  $u$  (相當於雷達切向風的方位分量) 和  $w$  (近似雷達切向風的仰角分量) 的反演誤差愈大，而  $v$  (近似於雷達的徑向風) 的反演並沒有太大的

影響。原因是對於同一掃描區域，距離愈遠，所需要的仰角和方位角愈小，且本研究均置雷達於反演區域的南方，造成距離愈遠， $u$  和  $w$  對雷達徑向風的貢獻愈少。

7. 不同的掃描策略，經過誤差統計的結果，發現並沒有明顯的影響，可能是因為本研究是利用理想的數值模式進行測試，因為模式完全足動力學上的方程式且沒有觀測上的誤差造成的，若使用真實個案測試則可能就會有比較明顯的影響。

本篇研究嘗試完整的反演出三維的風場，並且在一次的計算中即完成。進行了一些簡單的測試，証實了這樣的想法可行，並且對於其特性有些初步的了解，但還有許多重要的主題還沒有探討，例如權重函數的估計。Zhang and Gal-Chen (1996) 有針對權重函數的估計進行探討，不同的權重函數估計雖然對反演結果的影響並不是很大，風場的特徵都能掌握，但是風場細微的結構有就會有影響，如渦旋的位置、極值的大小等。如何決定每一項約束條件的權重大小以及如何準確的估計權重，是往後可以探討的問題。

真實個案的測試也是非常急迫要進行的一件事情，本研究主要是利用模式模擬的結果進行反演和比對，模式的風場完全滿足流體力學方程組的動力模式，回波也完全的保守，所以反演能夠得到不錯的結果。但是在真實的觀測中並不會有這麼理想的風場和回波場。大氣中水的相位變化，如蒸發、凝結等微物理作用會使得回波有所消長，並不只受到平流的影響而已。此方法要在實際觀測進行測試一定會有許多問題需要克服的。

長遠的來看，在提高反演的精確度，得到可信度高的反演結果之後，除了可以做天氣現象及某些系統結構的分析之外，再配合著熱動力場的反演更能得到溫度和壓力的資訊。這些風場、壓力場和溫度場的特色是具有高空間和時間的解析度，若能配合資料同化的技術把這些高解析度的網格點資料放入模式內，也許可以改善模式的預報能力，提高模式的預報度。

## 附錄 A

變分分析的目的是要得到價值函數對未知變量的梯度值 $\partial I/\partial u$ 、 $\partial I/\partial v$ 、 $\partial I/\partial w$ 。過程為：對價值函數 $I$ 做變分分析求出 $dI$ ，化簡成如下的格式，即可得到 $\partial I/\partial u$ 、 $\partial I/\partial v$ 、 $\partial I/\partial w$ ：

$$dI = \sum \sum \sum \sum \left( \frac{\partial I}{\partial u} du + \frac{\partial I}{\partial v} dv + \frac{\partial I}{\partial w} dw \right) \quad (A1)$$

假設網格點的大小為 $7 \times 7 \times 7$ ，共三個時間的資料，價值函數的每一項可分開推導，最後再把每一項所推導的結果合起來即可，類似微積分的計算方式，詳細過程如下：

### A.1 回波保守方程 ( $J_1$ )

$$J_1 = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} \quad (A2)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 a_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ a_1(t, k, i, j) \left[ \begin{array}{l} \frac{h(t+1, k, i, j) + h(t-1, k, i, j)}{2\Delta t} \\ + u(k, i, j) \frac{h(t, k, i+1, j) + h(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \\ + v(k, i, j) \frac{h(t, k, i, j+1) + h(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \\ + w(k, i, j) \frac{h(t, k+1, i, j) + h(t, k-1, i, j)}{2\Delta z} \end{array} \right]^2 \right.$$

$$dI_1 = \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \begin{array}{l} a_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{h(t, k, i+1, j) - h(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} du(k, i, j) \\ + a_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{h(t, k, i, j+1) - h(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} dv(k, i, j) \\ + a_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{h(t, k, i+1, j) - h(t, k, i-1, j)}{2\Delta z} dw(k, i, j) \end{array} \right]^2$$

與(A1)的形式對照可以得到：

$$\frac{\partial I_1}{\partial u} = \mathbf{a}_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i+1, j) - \mathbf{h}(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \quad (\text{A2a})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v} = \mathbf{a}_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i, j+1) - \mathbf{h}(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \quad (\text{A2b})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w} = \mathbf{a}_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i+1, j) - \mathbf{h}(t, k, i-1, j)}{2\Delta z} \quad (\text{A2c})$$

## A.2 雷達徑向風場與 u、v、w 的關係式 (J<sub>2</sub>)

$$J_2 = V_r - u \frac{x - p_1}{r} - v \frac{y - p_2}{r} - w \frac{z - p_3}{r} \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \mathbf{a}_2(t, k, i, j) \left( V_r - \frac{x(t, k, i, j) - p_1}{r} - \frac{y(t, k, i, j) - p_2}{r} - \frac{z(t, k, i, j) - p_3}{r} \right) \right]^2 \\ \mathbf{d}I_2 &= \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_1 - x(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \mathbf{d}u(k, i, j) \\ &+ \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_2 - y(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \mathbf{d}v(k, i, j) \\ &+ \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_3 - z(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \mathbf{d}w(k, i, j) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_2(t, k, i, j)}{\partial u} = \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_1 - x(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \quad (\text{A3a})$$

$$\frac{\partial I_2(t, k, i, j)}{\partial v} = \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_2 - y(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \quad (\text{A3b})$$

$$\frac{\partial I_2(t, k, i, j)}{\partial w} = \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_3 - z(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \quad (\text{A3c})$$

## A.3 連續方程式

$$J_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_3(t, k, i, j) J_3(k, i, j)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_3(t, k, i, j) \left[ \frac{u(k, i+1, j) - u(k, i-1, j)}{2\Delta x} + \frac{v(k, i, j+1) - v(k, i, j-1)}{2\Delta y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{w(k+1, i, j) - w(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right]^2 \\
dI_3 &= \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \mathbf{a}_3(t, k, i, j) J_3(k, i, j) \frac{du(k, i+1, j) - du(k, i-1, j)}{2\Delta x} \right. \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, i, j) J_3(k, i, j) \frac{dv(k, i, j+1) - dv(k, i, j-1)}{2\Delta y} \\
&\quad \left. + \mathbf{a}_3(t, k, i, j) J_3(k, i, j) \frac{dw(k+1, i, j) - dw(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \\
dI_3 &= \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \mathbf{a}_3(t, k, 2, j) J_3(k, 2, j) \frac{du(k, 3, j) - du(k, 1, j)}{2\Delta x} \right. \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, 3, j) J_3(k, 3, j) \frac{du(k, 4, j) - du(k, 2, j)}{2\Delta x} \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, 4, j) J_3(k, 4, j) \frac{du(k, 5, j) - du(k, 3, j)}{2\Delta x} \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, 5, j) J_3(k, 5, j) \frac{du(k, 6, j) - du(k, 4, j)}{2\Delta x} \\
&\quad \left. + \mathbf{a}_3(t, k, 6, j) J_3(k, 6, j) \frac{du(k, 7, j) - du(k, 5, j)}{2\Delta x} \right] \\
&\quad + \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \left[ \mathbf{a}_3(t, k, i, 2) J_3(k, i, 2) \frac{dv(k, i, 3) - dv(k, i, 1)}{2\Delta y} \right. \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, i, 3) J_3(k, i, 3) \frac{dv(k, i, 4) - dv(k, i, 2)}{2\Delta y} \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, i, 4) J_3(k, i, 4) \frac{dv(k, i, 5) - dv(k, i, 3)}{2\Delta y} \\
&\quad + \mathbf{a}_3(t, k, i, 5) J_3(k, i, 5) \frac{dv(k, i, 6) - dv(k, i, 4)}{2\Delta y} \\
&\quad \left. + \mathbf{a}_3(t, k, i, 6) J_3(k, i, 6) \frac{dv(k, i, 7) - dv(k, i, 5)}{2\Delta y} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{t=2}^2 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \begin{array}{l} \mathbf{a}_3(t, 2, i, j) J_3(2, i, j) \frac{\mathbf{d}w(3, i, j) - \mathbf{d}w(1, i, j)}{2\Delta z} \\ + \mathbf{a}_3(t, 3, i, j) J_3(3, i, j) \frac{\mathbf{d}w(4, i, j) - \mathbf{d}w(2, i, j)}{2\Delta z} \\ + \mathbf{a}_3(t, 4, i, j) J_3(4, i, j) \frac{\mathbf{d}w(5, i, j) - \mathbf{d}w(3, i, j)}{2\Delta z} \\ + \mathbf{a}_3(t, 5, i, j) J_3(5, i, j) \frac{\mathbf{d}w(6, i, j) - \mathbf{d}w(4, i, j)}{2\Delta z} \\ + \mathbf{a}_3(t, 6, i, j) J_3(6, i, j) \frac{\mathbf{d}u(7, i, j) - \mathbf{d}u(5, i, j)}{2\Delta z} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{d}l_3 = \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 2, j) J_3(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 1, j) - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 3, j) J_3(k, 3, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 2, j) \\ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 4, j) J_3(k, 4, j) - \mathbf{a}_3(t, k, 2, j) J_3(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 3, j) \\ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 5, j) J_3(k, 5, j) - \mathbf{a}_3(t, k, 3, j) J_3(k, 3, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 4, j) \\ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 6, j) J_3(k, 6, j) - \mathbf{a}_3(t, k, 4, j) J_3(k, 4, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 5, j) \\ - \left[ \frac{-\mathbf{a}_3(t, k, 5, j) J_3(k, 5, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 6, j) - \left[ \frac{-\mathbf{a}_3(t, k, 6, j) J_3(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 7, j) \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \left\{ \begin{array}{l} - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 2) J_3(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 1) - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 3) J_3(k, i, 3)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 2) \\ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 4) J_3(k, i, 4) - \mathbf{a}_3(t, k, i, 2) J_3(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 3) \\ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 5) J_3(k, i, 5) - \mathbf{a}_3(t, k, i, 3) J_3(k, i, 3)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 4) \\ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 6) J_3(k, i, 6) - \mathbf{a}_3(t, k, i, 4) J_3(k, i, 4)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 5) \\ - \left[ \frac{-\mathbf{a}_3(t, k, i, 5) J_3(k, i, 5)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 6) - \left[ \frac{-\mathbf{a}_3(t, k, i, 6) J_3(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 7) \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{t=2}^2 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 2, i, j) J_3(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(1, i, j) - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 3, i, j) J_3(3, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(2, i, j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 4, i, j) J_3(4, i, j) - \mathbf{a}_3(t, 2, i, j) J_3(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(3, i, j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 5, i, j) J_3(5, i, j) - \mathbf{a}_3(t, 3, i, j) J_3(3, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(4, i, j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 6, i, j) J_3(6, i, j) - \mathbf{a}_3(t, 4, i, j) J_3(4, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(5, i, j) \\ & - \left[ \frac{-\mathbf{a}_3(t, 5, i, j) J_3(5, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(6, i, j) - \left[ \frac{-\mathbf{a}_3(t, 6, i, j) J_3(6, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(7, i, j) \end{aligned} \right\}$$

令  $J_3$  在邊界為 0，故可以在上式中加入：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 1, j) J_3(k, 1, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 2, j) \quad - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 7, j) J_3(k, 7, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 6, j) \\ & \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 1) J_3(k, i, 1)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 2) \quad - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 7) J_3(k, i, 7)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 6) \\ & \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 1, i, j) J_3(1, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(2, i, j) \quad - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 7, i, j) J_3(7, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(7, i, j) \end{aligned}$$

把方程式簡化如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{d}I_3 &= \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i+1, j) J_3(k, i+1, j) - \mathbf{a}_3(t, k, i-1, j) J_3(k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, i, j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, j+1) J_3(k, i, j+1) - \mathbf{a}_3(t, k, i, j-1) J_3(k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k+1, i, j) J_3(k+1, i, j) - \mathbf{a}_3(t, k-1, i, j) J_3(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(k, i, j) \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 2, j) J_3(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 1, j) + \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 6, j) J_3(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}u(k, 7, j) \right\} \\ &= \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \left\{ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 2) J_3(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 1) + \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 6) J_3(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] \mathbf{d}v(k, i, 7) \right\} \\ &= \sum_{t=2}^2 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 2, i, j) J_3(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(1, i, j) + \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 6, i, j) J_3(6, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}w(7, i, j) \right\} \end{aligned}$$

與(A1)的形式對照可以得到：



$$\frac{\partial I_3(t, k, i, j)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i+1, j) J_3(k, i+1, j) - \mathbf{a}_3(t, k, i-1, j) J_3(k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A3a})$$

$$\frac{\partial I_3(t, k, i, j)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, j+1) J_3(k, i, j+1) - \mathbf{a}_3(t, k, i, j-1) J_3(k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A3b})$$

$$\frac{\partial I_3(t, k, i, j)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k+1, i, j) J_3(k+1, i, j) - \mathbf{a}_3(t, k-1, i, j) J_3(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A3c})$$

邊界則為：

$$\frac{\partial I_3(t, k, 1, j)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 2, j) J_3(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A3d})$$

$$\frac{\partial I_3(t, k, 7, j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 6, j) J_3(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A3e})$$

$$\frac{\partial I_3(t, k, i, 1)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 2) J_3(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A3f})$$

$$\frac{\partial I_3(t, k, i, 7)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 6) J_3(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A3g})$$

$$\frac{\partial J(t, 1, i, j)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 2, i, j) J_3(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A3h})$$

$$\frac{\partial J(t, 7, i, j)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 6, i, j) J_3(6, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A3i})$$

#### A.4 弱水平和弱垂直渦度 (J<sub>5</sub>、J<sub>6</sub>、J<sub>7</sub>)

$$J_4 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A4})$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_4(t, k, i, j) J_4(k, i, j)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_4(t, k, i, j) \left( \frac{u(k+1, i, j) - u(k-1, i, j)}{2\Delta z} - \frac{w(k, i+1, j) - w(k, i-1, j)}{2\Delta x} \right)^2$$

$$dI_4 = \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}_4(t, k, i, j) J_4(t, k, i, j) \frac{d\mathbf{u}(k+1, i, j) - d\mathbf{u}(k-1, i, j)}{2\Delta z} \\ -\mathbf{a}_4(t, k, i, j) J_4(t, k, i, j) \frac{d\mathbf{w}(k, i+1, j) - d\mathbf{w}(k, i-1, j)}{2\Delta x} \end{array} \right]$$

$$dI_4 = \sum_{t=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}_4(t, 2, i, j) J_4(2, i, j) \frac{d\mathbf{u}(3, i, j) - d\mathbf{u}(1, i, j)}{2\Delta z} \\ +\mathbf{a}_4(t, 3, i, j) J_4(3, i, j) \frac{d\mathbf{u}(4, i, j) - d\mathbf{u}(2, i, j)}{2\Delta z} \\ +\mathbf{a}_4(t, 4, i, j) J_4(4, i, j) \frac{d\mathbf{u}(5, i, j) - d\mathbf{u}(3, i, j)}{2\Delta z} \\ +\mathbf{a}_4(t, 5, i, j) J_4(5, i, j) \frac{d\mathbf{u}(6, i, j) - d\mathbf{u}(4, i, j)}{2\Delta z} \\ +\mathbf{a}_4(t, 6, i, j) J_4(6, i, j) \frac{d\mathbf{u}(7, i, j) - d\mathbf{u}(5, i, j)}{2\Delta z} \end{array} \right]$$

$$-\sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}_4(t, k, 2, j) J_4(k, 2, j) \frac{d\mathbf{w}(k, 3, j) - d\mathbf{w}(k, 1, j)}{2\Delta x} \\ +\mathbf{a}_4(t, k, 3, j) J_4(k, 3, j) \frac{d\mathbf{w}(k, 4, j) - d\mathbf{w}(k, 2, j)}{2\Delta x} \\ +\mathbf{a}_4(t, k, 4, j) J_4(k, 4, j) \frac{d\mathbf{w}(k, 5, j) - d\mathbf{w}(k, 3, j)}{2\Delta x} \\ +\mathbf{a}_4(t, k, 5, j) J_4(k, 5, j) \frac{d\mathbf{w}(k, 6, j) - d\mathbf{w}(k, 4, j)}{2\Delta x} \\ +\mathbf{a}_4(t, k, 6, j) J_4(k, 6, j) \frac{d\mathbf{w}(k, 7, j) - d\mathbf{w}(k, 5, j)}{2\Delta x} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
dI_4 = & \sum_{i=2}^2 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,2,i,j)J_4(2,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(1,i,j) - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,3,i,j)J_4(3,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(2,i,j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,4,i,j)J_4(4,i,j) - \mathbf{a}_4(t,2,i,j)J_4(2,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(3,i,j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,5,i,j)J_4(5,i,j) - \mathbf{a}_4(3,i,j)J_4(3,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(4,i,j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,6,i,j)J_4(6,i,j) - \mathbf{a}_4(t,4,i,j)J_4(4,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(5,i,j) \\ & - \left[ \frac{-\mathbf{a}_4(t,5,i,j)J_4(5,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(6,i,j) - \left[ \frac{-\mathbf{a}_4(t,6,i,j)J_4(6,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(7,i,j) \end{aligned} \right\} \\
& - \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,2,j)J_4(k,2,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,1,j) - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,3,j)J_4(k,3,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,2,j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,4,j)J_4(k,4,j) - \mathbf{a}_4(t,k,2,j)J_4(k,2,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,3,j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,5,j)J_4(k,5,j) - \mathbf{a}_4(t,k,3,j)J_4(k,3,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,4,j) \\ & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,6,j)J_4(k,6,j) - \mathbf{a}_4(t,k,4,j)J_4(k,4,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,5,j) \\ & - \left[ \frac{-\mathbf{a}_4(t,k,5,j)J_4(k,5,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,6,j) - \left[ \frac{-\mathbf{a}_4(t,k,6,j)J_4(k,6,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,7,j) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

令  $J_4$  在邊界為 0，故可以在上式中加入：

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,1,i,j)J_4(1,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(2,i,j) & - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,7,i,j)J_4(7,i,j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(6,i,j) \\
& - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,1,j)J_3(k,1,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,2,j) & \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t,k,7,j)J_4(k,7,j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k,6,j)
\end{aligned}$$

方程式簡化如下：

$$\begin{aligned}
dI_4 = & \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k+1, i, j) J_4(t, k+1, i, j) - \mathbf{a}_4(t, k-1, i, j) J_4(t, k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(k, i, j) \right\} \\
& + \left\{ \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, i+1, j) J_4(t, k, i+1, j) - \mathbf{a}_4(t, k, i-1, j) J_4(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k, i, j) \right\} \\
& + \sum_{i=2}^2 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, 2, i, j) J_4(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(1, i, j) + \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, 6, i, j) J_4(6, i, j)}{2\Delta z} \right] \mathbf{d}u(7, i, j) \right\} \\
& + \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left\{ \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, 2, j) J_4(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k, 1, j) - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, 6, j) J_4(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] \mathbf{d}w(k, 7, j) \right\}
\end{aligned}$$

與(A1)的形式對照可以得到：

$$\frac{\partial I_4(t, k, i, j)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k+1, i, j) J_4(t, k+1, i, j) - \mathbf{a}_4(t, k-1, i, j) J_4(t, k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A4a})$$

$$\frac{\partial I_4(t, k, i, j)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, i+1, j) J_4(t, k, i+1, j) - \mathbf{a}_4(t, k, i-1, j) J_4(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A4b})$$

$$\frac{\partial I_4(t, 1, i, j)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, 2, i, j) J_4(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A4c})$$

$$\frac{\partial I_4(t, n_z, i, j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, 6, i, j) J_4(6, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A4d})$$

$$\frac{\partial I_4(t, k, 1, j)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, 2, j) J_4(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A4e})$$

$$\frac{\partial I_4(t, k, 7, j)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, 6, j) J_4(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A4f})$$

同樣的方式證明  $J_5$  和  $J_6$  可以得到下列的結果：

$$J_5 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_5(t, k, i, j) J_5(k, i, j)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_5(t, k, i, j) \left( \frac{w(k, i, j+1) - w(k, i, j-1)}{2\Delta y} - \frac{v(k+1, i, j) - v(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{dI_5(t, k, i, j)}{dv} = \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k+1, i, j)J_5(t, k+1, i, j) - \mathbf{a}_5(t, k-1, i, j)J_5(t, k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A5a})$$

$$\frac{dI_5(t, k, i, j)}{dw} = \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k, i, j+1)J_5(t, k, i, j+1) - \mathbf{a}_5(t, k, i, j-1)J_5(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A5b})$$

邊界為：

$$\frac{\partial I_5(t, 2, i, j)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, 2, i, j)J_5(2, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A5c})$$

$$\frac{\partial I_5(t, 7, i, j)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, 6, i, j)J_5(6, i, j)}{2\Delta z} \right] \quad (\text{A5d})$$

$$\frac{\partial I_5(t, k, i, 1)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k, i, 2)J_5(k, 2, j)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A5e})$$

$$\frac{\partial I_5(t, k, i, 7)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k, i, 6)J_5(k, i, 6)}{2\Delta y'} \right] \quad (\text{A5f})$$

$$J_6 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^6 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_6(t, k, i, j) J_6(k, i, j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^6 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_6(t, k, i, j) \left( \frac{v(k, i+1, j) - v(k, i-1, j)}{2\Delta x} - \frac{u(k, i, j+1) - u(k, i, j-1)}{2\Delta y} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_6(t, k, i, j)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i+1, j)J_6(t, k, i+1, j) - \mathbf{a}_6(t, k, i-1, j)J_6(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A6a})$$

$$\frac{\partial I_6(t, k, i, j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i, j+1)J_6(t, k, i, j+1) - \mathbf{a}_6(t, k, i, j-1)J_6(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A6b})$$

邊界為：

$$\frac{\partial I_6(t, k, i, 1)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i, 2)J_6(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A6c})$$

$$\frac{\partial I_6(t, k, i, 7)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i, 6) J_6(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] \quad (\text{A6d})$$

$$\frac{\partial I_6(t, k, 1, j)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, 2, j) J_6(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A6e})$$

$$\frac{\partial I_6(t, k, 7, j)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, 6, j) J_6(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A6f})$$

## A.5 拉普拉斯濾波函數

$J_9$ 、 $J_{17}$  的推導相同，故以  $J_9$  的推導為例：

$$J_9 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A9})$$

$$I_9 = \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_9(t, k, i, j) J_9(k, i, j)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \mathbf{a}_9(t, k, i, j) \left[ \frac{u(k, i+1, j) - 2u(k, i, j) + u(k, i-1, j)}{\Delta x^2} \right]^2$$

$$dI_9 = \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \mathbf{a}_9(t, k, i, j) J_9(k, i, j) \frac{du(k, i+1, j) - 2du(k, i, j) + du(k, i-1, j)}{\Delta x^2} \right]$$

$$dI_9 = \sum_{t=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \begin{aligned} & \mathbf{a}_9(t, k, 2, j) J_9(k, 2, j) \frac{du(k, 3, j) - 2du(k, 2, j) + du(k, 1, j)}{\Delta x^2} \\ & + \mathbf{a}_9(t, k, 3, j) J_9(k, 3, j) \frac{du(k, 4, j) - 2du(k, 3, j) + du(k, 2, j)}{\Delta x^2} \\ & + \mathbf{a}_9(t, k, 4, j) J_9(k, 4, j) \frac{du(k, 5, j) - 2du(k, 4, j) + du(k, 3, j)}{\Delta x^2} \\ & + \mathbf{a}_9(t, k, 5, j) J_9(k, 5, j) \frac{du(k, 6, j) - 2du(k, 5, j) + du(k, 4, j)}{\Delta x^2} \\ & + \mathbf{a}_9(t, k, 6, j) J_9(k, 6, j) \frac{du(k, 7, j) - 2du(k, 6, j) + du(k, 5, j)}{\Delta x^2} \end{aligned} \right]$$

$$dI_9 = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,2,j)J_9(t,k,2,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,1,j) \\ & + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,3,j)J_9(t,k,3,j) - 2\mathbf{a}_9(t,k,2,j)J_9(t,k,2,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,2,j) \\ & + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,4,j)J_9(t,k,4,j) - 2\mathbf{a}_9(t,k,3,j)J_9(t,k,3,j) + \mathbf{a}_9(t,k,2,j)J_9(t,k,2,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,3,j) \\ & + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,5,j)J_9(t,k,5,j) - 2\mathbf{a}_9(t,k,4,j)J_9(t,k,4,j) + \mathbf{a}_9(t,k,3,j)J_9(t,k,3,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,4,j) \\ & + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,6,j)J_9(t,k,6,j) - 2\mathbf{a}_9(t,k,5,j)J_9(t,k,5,j) + \mathbf{a}_9(t,k,4,j)J_9(t,k,4,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,5,j) \\ & + \left[ \frac{-2\mathbf{a}_9(t,k,6,j)J_9(t,k,6,j) + \mathbf{a}_9(t,k,5,j)J_9(t,k,5,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,6,j) \\ & + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,6,j)J_9(t,k,6,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,7,j) \end{aligned} \right.$$

令  $J_4$  在邊界為 0，故可以在上式中加入：

$$\left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,1,j)J_9(k,1,j)}{2\Delta x} \right] du(2,i,j) \quad \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,7,j)J_9(k,7,j)}{2\Delta x} \right] du(6,i,j)$$

方程式簡化如下：

$$dI_9 = \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 \frac{\mathbf{a}_9(t,k,i+1,j)J_9(k,i+1,j) - 2\mathbf{a}_9(t,k,i,j)J_9(k,i,j) + \mathbf{a}_9(t,k,i-1,j)J_9(k,i-1,j)}{\Delta x^2} du(k,i,j) \\ + \sum_{i=2}^2 \sum_{k=2}^6 \sum_{j=2}^6 \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,2,j)J_9(k,2,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,1,j) + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,6,j)J_9(k,6,j)}{\Delta x^2} \right] du(k,7,j)$$

與(A1)的形式對照可以得到：

$$\frac{\partial I_9}{\partial u} = \frac{\mathbf{a}_9(t,k,i+1,j)J_9(k,i+1,j) - 2\mathbf{a}_9(t,k,i,j)J_9(k,i,j) + \mathbf{a}_9(t,k,i-1,j)J_9(k,i-1,j)}{\Delta x^2} \quad (A9)$$

邊界條件為：

$$\frac{\partial I_9(t,k,1,j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,2,j)J_9(k,2,j)}{\Delta x^2} \right] \quad (A9a)$$

$$\frac{\partial I_9(t,k,7,j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t,k,6,j)J_9(k,6,j)}{\Delta x^2} \right] \quad (A9b)$$

最後把每一項的結果加起來，得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(t, k, i, j)}{\partial u} &= \mathbf{a}_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i+1, j) - \mathbf{h}(t, k, i-1, j)}{2\Delta x'} \\
&+ \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_1 - x(k, i, j)}{r(k, i, j)} \right] \\
&- \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i+1, j) J_3(k, i+1, j) - \mathbf{a}_3(t, k, i-1, j) J_3(k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \\
&- \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k+1, i, j) J_4(t, k+1, i, j) - \mathbf{a}_4(t, k-1, i, j) J_4(t, k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \\
&+ \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i, j+1) J_6(t, k, i, j+1) - \mathbf{a}_6(t, k, i, j-1) J_6(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \\
&+ \mathbf{a}_7(t, k) J_7(t, k) \\
&+ \frac{\mathbf{a}_9(t, k, i+1, j) J_9(k, i+1, j) - 2\mathbf{a}_9(t, k, i, j) J_9(k, i, j) + \mathbf{a}_9(t, k, i-1, j) J_9(k, i-1, j)}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{10}(t, k, i, j+1) J_{10}(k, i, j+1) - 2\mathbf{a}_{10}(t, k, i, j) J_{10}(k, i, j) + \mathbf{a}_{10}(t, k, i, j-1) J_{10}(k, i, j-1)}{\Delta y^2} \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{11}(t, k+1, i, j) J_{11}(k+1, i, j) - 2\mathbf{a}_{11}(t, k, i, j) J_{11}(k, i, j) + \mathbf{a}_{11}(t, k, i, j-1) J_{11}(k, i, j-1)}{\Delta z^2} \\
\frac{\partial I(t, k, i, j)}{\partial v} &= \mathbf{a}_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i, j+1) - \mathbf{h}(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \\
&+ \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_2 - y(k, i, j)}{r'(k, i, j)} \right] \\
&- \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, j+1) J_3(k, i, j+1) - \mathbf{a}_3(t, k, i, j-1) J_3(k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \\
&+ \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k+1, i, j) J_5(t, k+1, i, j) - \mathbf{a}_5(t, k-1, i, j) J_5(t, k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \\
&- \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i+1, j) J_6(t, k, i+1, j) - \mathbf{a}_6(t, k, i-1, j) J_6(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \\
&+ \mathbf{a}_8(t, k) J_8(t, k) \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{12}(t, k, i+1, j) J_{12}(k, i+1, j) - 2\mathbf{a}_{12}(t, k, i, j) J_{12}(k, i, j) + \mathbf{a}_{12}(t, k, i-1, j) J_{12}(k, i-1, j)}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{13}(t, k, i, j+1) J_{13}(k, i, j+1) - 2\mathbf{a}_{13}(t, k, i, j) J_{13}(k, i, j) + \mathbf{a}_{13}(t, k, i, j-1) J_{13}(k, i, j-1)}{\Delta y^2} \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{14}(t, k+1, i, j) J_{14}(k+1, i, j) - 2\mathbf{a}_{14}(t, k, i, j) J_{14}(k, i, j) + \mathbf{a}_{14}(t, k-1, i, j) J_{14}(k-1, i, j)}{\Delta z^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(t, k, i, j)}{\partial w} &= \mathbf{a}_1(t, k, i, j) J_1(t, k, i, j) \frac{\mathbf{h}(t, k, i+1, j) - \mathbf{h}(t, k, i-1, j)}{2\Delta z} \\
&+ \mathbf{a}_2(t, k, i, j) J_2(t, k, i, j) \left[ \frac{p_3 - z(k, i, j)}{r'(k, i, j)} \right] \\
&- \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k+1, i, j) J_3(k+1, i, j) - \mathbf{a}_3(t, k-1, i, j) J_3(k-1, i, j)}{2\Delta z} \right] \\
&+ \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, i+1, j) J_4(t, k, i+1, j) - \mathbf{a}_4(t, k, i-1, j) J_4(t, k, i-1, j)}{2\Delta x} \right] \\
&- \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k, i, j+1) J_5(t, k, i, j+1) - \mathbf{a}_5(t, k, i, j-1) J_5(t, k, i, j-1)}{2\Delta y} \right] \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{15}(t, k, i+1, j) J_{15}(k, i+1, j) - 2\mathbf{a}_{15}(t, k, i, j) J_{15}(k, i, j) + \mathbf{a}_{15}(t, k, i-1, j) J_{15}(k, i-1, j)}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{16}(t, k, i, j+1) J_{16}(k, i, j+1) - 2\mathbf{a}_{16}(t, k, i, j) J_{16}(k, i, j) + \mathbf{a}_{16}(t, k, i, j-1) J_{16}(k, i, j-1)}{\Delta y^2} \\
&+ \frac{\mathbf{a}_{17}(t, k+1, i, j) J_{17}(k+1, i, j) - 2\mathbf{a}_{17}(t, k, i, j) J_{17}(k, i, j) + \mathbf{a}_{17}(t, k-1, i, j) J_{17}(k-1, i, j)}{\Delta z^2}
\end{aligned}$$

邊界為：

當  $x = 1$

$$\frac{\partial I(t, k, 1, j)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 2, j) J_3(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t, k, 2, j) J_9(k, 2, j)}{\Delta x^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, 1, j)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, 2, j) J_6(k, 2, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{12}(t, k, 2, j) J_{12}(k, 2, j)}{\Delta x^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, 1, j)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, 2, j) J_4(k, 2, j)}{2\Delta x'} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{15}(t, k, 2, j) J_{15}(k, 2, j)}{\Delta x'^2} \right]$$

當  $x = 7$

$$\frac{\partial I(t, k, 7, j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, 7, j) J_3(k, 7, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_9(t, k, 7, j) J_9(k, 7, j)}{\Delta x^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, 7, j)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, 7, j) J_6(k, 7, j)}{2\Delta x} \right] - \left[ \frac{\mathbf{a}_{12}(t, k, 7, j) J_{12}(k, 7, j)}{\Delta x^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, 7, j)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, k, 6, j) J_4(k, 6, j)}{2\Delta x} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{15}(t, k, 6, j) J_{15}(k, 6, j)}{\Delta x^2} \right]$$

當  $y = 1$

$$\frac{\partial I(t, k, i, 1)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i, 2) J_6(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{10}(t, k, i, 2) J_{10}(k, i, 2)}{\Delta y^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, i, 1)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 2) J_3(k, i, 2)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{13}(t, k, i, 2) J_{13}(k, i, 2)}{\Delta y^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, i, 1)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k, i, 2) J_5(k, 2, j)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{16}(t, k, i, 2) J_{16}(k, i, 2)}{\Delta y^2} \right]$$

當  $y = 7$

$$\frac{\partial I(t, k, i, 7)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_6(t, k, i, 6) J_6(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{10}(t, k, i, 6) J_{10}(k, i, 6)}{\Delta y^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, i, 7)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, k, i, 6) J_3(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{13}(t, k, i, 6) J_{13}(k, i, 6)}{\Delta y^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, k, i, 7)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, k, i, 6) J_5(k, i, 6)}{2\Delta y} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{16}(t, k, i, 6) J_{16}(k, i, 6)}{\Delta y^2} \right]$$

當  $z = 1$

$$\frac{\partial J(t, 1, i, j)}{\partial u} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, 2, i, j) J_4(2, i, j)}{2\Delta z'} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{11}(t, 2, i, j) J_{11}(2, i, j)}{\Delta z'^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, 2, i, j)}{\partial v} = \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, 2, i, j) J_5(2, i, j)}{2\Delta z} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{14}(t, 2, i, j) J_{14}(2, i, j)}{\Delta z^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, 1, i, j)}{\partial w} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 2, i, j) J_3(2, i, j)}{2\Delta z} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{17}(t, 2, i, j) J_{17}(2, i, j)}{\Delta z^2} \right]$$

當  $z = 7$

$$\frac{\partial I(t, 7, i, j)}{\partial u} = \left[ \frac{\mathbf{a}_4(t, 6, i, j) J_4(6, i, j)}{2\Delta z} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{11}(t, 6, i, j) J_{11}(6, i, j)}{\Delta z^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, 7, i, j)}{\partial v} = - \left[ \frac{\mathbf{a}_5(t, 6, i, j) J_5(6, i, j)}{2\Delta z} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{14}(t, 6, i, j) J_{14}(6, i, j)}{\Delta z^2} \right]$$

$$\frac{\partial I(t, 7, i, j)}{\partial w} = \left[ \frac{\mathbf{a}_3(t, 6, i, j) J_3(6, i, j)}{2\Delta z} \right] + \left[ \frac{\mathbf{a}_{17}(t, 6, i, j) J_{17}(6, i, j)}{\Delta z^2} \right]$$

## 參考文獻

- 周仲島、張保亮與李文兆，1994：都卜勒雷達在颱風環流中尺度結構分析的應用。大氣科學，22，163-187。
- 趙坤、劉國慶、葛文忠、黨人慶，2002：用非線性近似方法反演單都卜勒雷達風場。海峽兩岸大氣科學研究生學術研討會論文彙編，103pp
- 羅英祥，2000：單雷達風場反演【移動座標法】的特性分析與應用。國立中央大學碩士論文，90pp
- Browning, k. A., and R. Wexler, 1968: The determination of kinematic properties of a wind field using Doppler radar. J. Appl. Meteor., 7, 105-113
- Gal-Chen t., 1982: Errors in Fixed and Moving Frame of References: Applications for Conventional and Doppler Radar Analysis. J. Atmos. Sci., 39, 2279-2300
- Gao J., A. Shapiro, Q. Xu, and K. K. Droegemeier, 2001: Three-Dimensional Simple Adjoint Velocity Retrievals from Single-Doppler Radar. J. Atmos. Oceanic Technol., 18, 26-38
- Haltiner, J. G., and R. G. Williams, 1983: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley and Sons. 477pp
- Lazarus S., A. Shapiro & K. Droegemeier, 2001: Application of the Zhang-Gal-Chen Single – Doppler Velocity Retrieval to a Deep Convective Storm, J. Atmos. Sci., 58, 998-1016
- Lee, W.-C., B. J.-D. Jou, P.-L Chang, and S.-M. Deng., 1999: Tropical cyclone kinematic structure retrieved from single-Doppler Radar observations. Part I: Interpretation

of Doppler velocity patterns and GBVTD Technique, *Mon. Wea. Rev.*, 127, 2419-2439.

Liu, D. C. and J. Nocedal, 1988: On the limited memory GFGS method for large scale optimization. Tech. Rep. NAM 03, Department of Electrical Engineering and Computer Science Northwestern University, 26 pp. [Available from the Department of Electrical Engineering and Computer Science, Northwestern University, Evanston, IL 60208].

Liou Y. C., 1999: Single Radar Recovery of Cross-Beam Wind Components Using a Modified Moving Frame of Reference Technique *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 16, 1003-1016

, and I. S. Luo, 2001: An Investigation of the Moving-Frame Single-Doppler Wind Retrieval Technique Using Taiwan Area Mesoscale Experiment Low-Level Data. *J. A. M.*, 40, 1900-1917

, 2002: An Explanation of the Wind Speed Underestimation Obtained From a Least Squares Type Single-Doppler Radar Velocity Retrieval Method. *J. Appl. Meteor.*, 41, 811-823

O'Brien, J. J., 1970: Alternative Solutions to the Classical Vertical Velocity Problem. *J. Appl. Meteor.*, 9, 197-203

Qiu, C.-J., and Q. Xu, 1992: A Simple Adjoint Method of Wind Analysis for Single-Doppler Data. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 9, 588-598

, and , 1996: Least squares retrieval of microburst winds from single-Doppler radar data. *Mon. Wea. Rev.*, 124, 1132-1144.

Rinehart, R. E., and E.T. Garvey, 1978: Three-dimensional storm

motion detection by conventional weather radar. Nature,273,154-167.

Shapiro, A., S. Ellis, and J. Shaw, 1995: Single-Doppler Velocity Retrievals with Phoenix II: Clear Air and Microburst Wind Retrievals in the Planetary Boundary Layer. J. Atm. Sci., 52, 1265-1287.

Sun, J., D. W. Flicker, and D. K. Lilly, 1991: Recovery of three dimensional wind and temperature fields from simulated Doppler radar data. J. Atmos. Sci.,48,876-890.

Testud, J., and M. Chong,1983: Three-Dimensional wind field analysis from dual-Doppler Radar data. Part I: Filtering, interpolating and differentiating the raw data. J. Climate Appl. Meteor., 22, 1204-1215.

Waldteufel, P., and H. Corbin, 1979: On the analysis of single-Doppler Radar data. J. Appl. Meteor.,18,532-542.

Weygant, S. S., A. Shapiro, K. K. Droegemeier, 2002: Retrieval of Model Initial Fields from Single-Doppler Observations of a Supercell Thunderstorm. Part I: Single-Doppler Velocity Retrieval., Mon. Wea. Rev. ,130, 433-453

Xu, Q., H. Gu and A. Yang, 2001: Simple adjoint method for three-dimensional wind retrievals from single-Doppler radar. Q. J. R. Meteorol. Soc.,127,1053-1067.

Zhang J. & T. Gal-Chen, 1996: Single-Doppler Wind Retrieval in the Moving Frame of Reference. J. Atmos. Sci., 15, 2609-2623

表 1 實驗的各個變數及移動座標的移速、RMS、RRMSE、SCC 及 RMSM  
 實驗編號中的 A、B、C 為 1 分鐘、3 分鐘、6 分鐘的掃瞄策略，50、100、150 為雷達與反演區域的距離  
 N、U5 和 V5 分別代表無系統移速，系統移速為  $U=5\text{m/s}$  和系統移速為  $V=5\text{m/s}$

實驗編號	U(m/s)	V(m/s)	W(m/s)	RMSE/RRMSE			SCC			RMSM(retrieve)			RMSM(true)		
				u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
A50N				0.599/0.796	0.119/0.158	0.350/0.483	0.669	0.989	0.916	0.533	0.746	0.694	0.753	0.753	0.724
A50U5	4.86	0.0	-0.08	1.311/0.259	0.228/0.303	0.481/0.666	0.415	0.968	0.883	5.967	0.787	0.899	5.055	0.753	0.724
A50V5	0.0	4.86	-0.08	0.708/0.940	0.122/0.024	0.344/0.476	0.727	0.989	0.915	0.656	5.030	0.758	0.753	5.056	0.724
A100N				0.686/0.911	0.114/0.152	0.349/0.482	0.685	0.990	0.920	0.476	0.758	0.689	0.753	0.753	0.724
A100U5	4.86	0.0	-0.08	0.814/0.161	0.118/0.157	0.354/0.489	0.594	0.990	0.914	5.123	0.730	0.765	5.056	0.753	0.724
A100V5	0.0	4.86	-0.08	0.777/1.032	0.113/0.024	0.355/0.492	0.662	0.991	0.916	0.595	5.039	0.743	0.753	5.056	0.724
A150N				0.752/0.998	0.113/0.150	0.361/0.498	0.621	0.990	0.918	0.465	0.756	0.684	0.753	0.753	0.724
A150U5	4.86	0.0	-0.086	0.844/0.167	0.109/0.145	0.366/0.505	0.576	0.991	0.914	5.101	0.737	0.763	5.056	0.753	0.724
A150V5	0.0	4.86	-0.08	0.832/1.105	0.107/0.021	0.370/0.512	0.608	0.992	0.913	0.596	5.050	0.744	0.753	5.056	0.724
B50N				0.563/0.748	0.134/0.178	0.303/0.419	0.773	0.986	0.922	0.722	0.746	0.738	0.753	0.753	0.724
B50U5	4.97	0.0	-0.18	0.607/0.120	0.135/0.179	0.359/0.497	0.700	0.985	0.902	4.983	0.737	0.748	5.055	0.753	0.723
B50V5	0.0	4.97	-0.18	0.549/0.730	0.127/0.025	0.341/0.472	0.777	0.897	0.910	0.687	5.039	0.716	0.753	5.055	0.723
B100N				0.561/0.745	0.123/0.164	0.342/0.472	0.811	0.989	0.915	0.534	0.764	0.679	0.753	0.753	0.723
B100U5	4.97	0.0	-0.18	0.559/0.110	0.119/0.158	0.344/0.476	0.778	0.989	0.912	4.976	0.755	0.728	5.056	0.753	0.723
B100V5	0.0	4.97	-0.18	0.599/0.756	0.122/0.024	0.344/0.476	0.794	0.988	0.914	0.579	5.048	0.705	0.753	5.055	0.723
B150N				0.632/0.839	0.125/0.166	0.336/0.464	0.780	0.988	0.916	0.787	0.762	1.125	0.753	0.753	0.724
B150U5	4.97	0.0	-0.18	0.598/0.118	0.120/0.159	0.352/0.487	0.799	0.989	0.911	4.969	0.763	0.721	5.056	0.753	0.723
B150V5	0.0	4.97	-0.18	0.664/0.882	0.126/0.025	0.349/0.483	0.756	0.989	0.916	0.523	5.052	0.700	0.753	5.055	0.723
C50N				0.569/0.757	0.153/0.203	0.359/0.496	0.729	0.981	0.903	0.627	0.722	0.656	0.753	0.753	0.724
C100N				0.575/0.763	0.146/0.194	0.355/0.490	0.792	0.983	0.908	0.525	0.729	0.648	0.753	0.753	0.724
C150N				0.622/0.825	0.149/0.197	0.368/0.508	0.788	0.983	0.904	0.483	0.750	0.649	0.753	0.753	0.724

表 2 比較系統具有移速的 RMSE、RRMSE、SCC、RMSM

實驗編號	U(m/s)	V(m/s)	W(m/s)	RMSE/RRMSE			SCC			RMSM(retrieve)			RMSM(true)		
				u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
A100N				0.686/0.911	0.114/0.152	0.349/0.482	0.685	0.990	0.920	0.476	0.758	0.689	0.753	0.753	0.724
A100U5	4.86	0.0	-0.08	0.814/0.161	0.118/0.157	0.354/0.489	0.594	0.990	0.914	5.123	0.730	0.765	5.056	0.753	0.724
B100U5	4.97	0.0	-0.18	0.559/0.110	0.119/0.158	0.344/0.476	0.778	0.989	0.912	4.976	0.755	0.728	5.056	0.753	0.723
A100V5	0.0	4.86	-0.08	0.777/1.032	0.113/0.024	0.355/0.492	0.662	0.991	0.916	0.595	5.039	0.743	0.753	5.056	0.724
B100V5	0.0	4.97	-0.18	0.599/0.756	0.122/0.024	0.344/0.476	0.794	0.988	0.914	0.579	5.048	0.705	0.753	5.055	0.723

表 3 比較雷達與反演區域的距離的 RMSE、RRMSE、SCC、RMSM

實驗編號	U(m/s)	V(m/s)	W(m/s)	RMSE/RRMSE			SCC			RMSM(retrieve)			RMSM(true)		
				u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
A50N				0.599/0.796	0.119/0.158	0.350/0.483	0.669	0.989	0.916	0.533	0.746	0.694	0.753	0.753	0.724
A100N				0.686/0.911	0.114/0.152	0.349/0.482	0.685	0.990	0.920	0.476	0.758	0.689	0.753	0.753	0.724
A150N				0.752/0.998	0.113/0.150	0.361/0.498	0.621	0.990	0.918	0.465	0.756	0.684	0.753	0.753	0.724

表 4 比較不同把瞄策略的 RMSE、RRMSE、SCC、RMSM

實驗編號	U(m/s)	V(m/s)	W(m/s)	RMSE/RRMSE			SCC			RMSM(retrieve)			RMSM(true)		
				u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
A100N				0.686/0.911	0.114/0.152	0.349/0.482	0.685	0.990	0.920	0.476	0.758	0.689	0.753	0.753	0.724
B100N				0.561/0.745	0.123/0.164	0.342/0.472	0.811	0.989	0.915	0.534	0.764	0.679	0.753	0.753	0.724
C100N				0.575/0.763	0.146/0.194	0.355/0.490	0.792	0.983	0.908	0.525	0.729	0.648	0.753	0.753	0.724



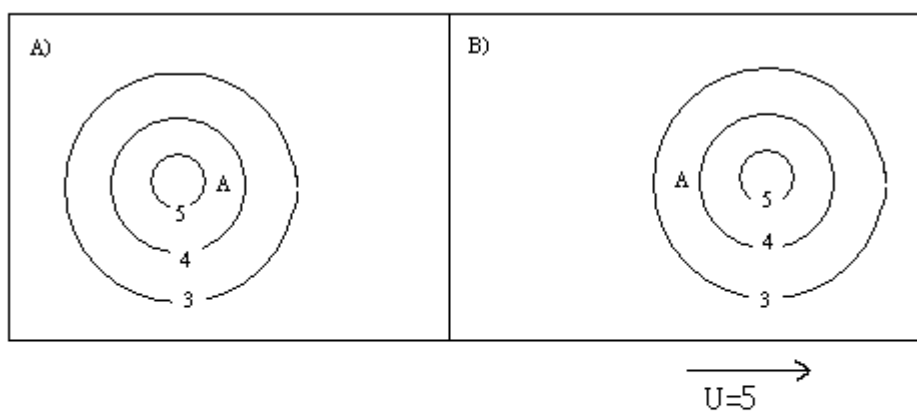


圖 2.1 離散掃描下之回波示意圖。(a)表示  $t$  時，而(b)表示  $t + \Delta t$  時間，等值線表示回波值

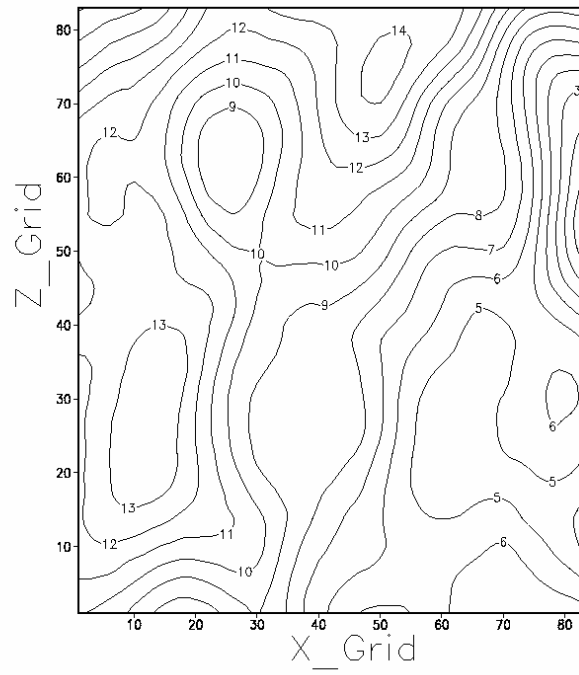


圖 3.1 簡單的平流方程式所模擬的回波場

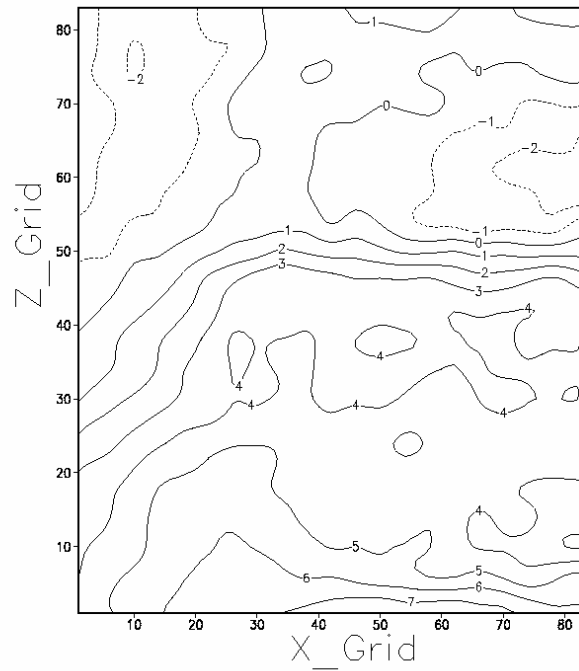


圖 3.2 簡單平流方程式所模擬的徑向風場

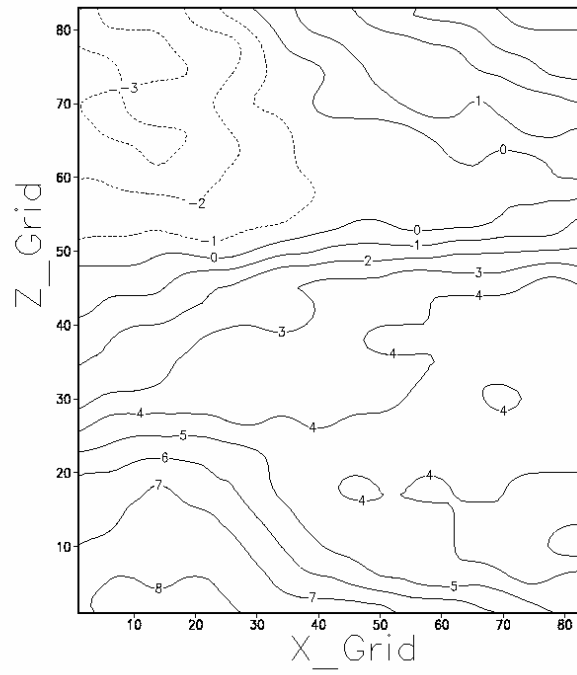


圖 3.3 簡單的平流方程式模擬風場的 u 分量

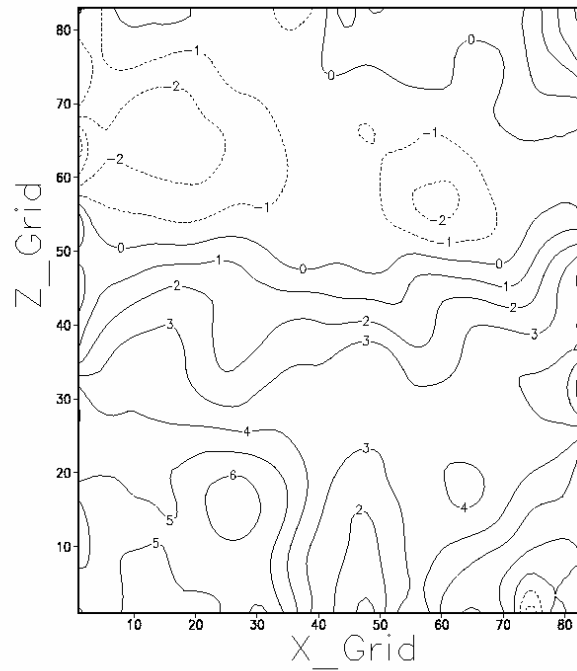


圖 3.4 風場反演得到的 u 分量

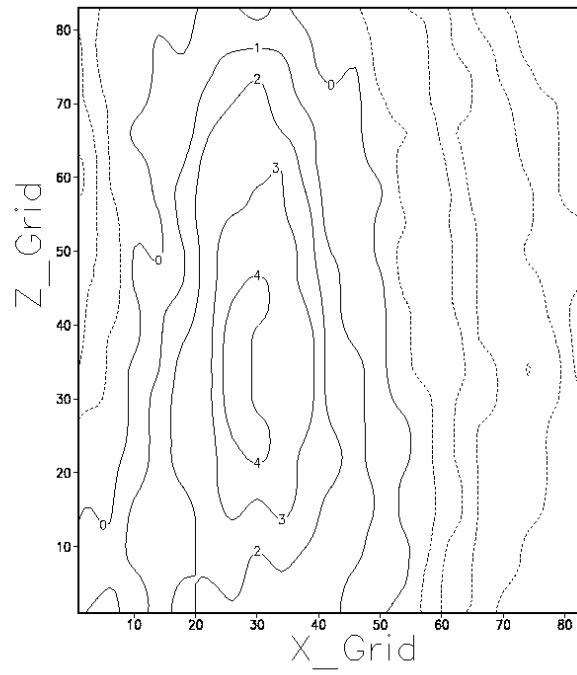


圖 3.5 簡單的平流方程式模擬風場的 w 分量

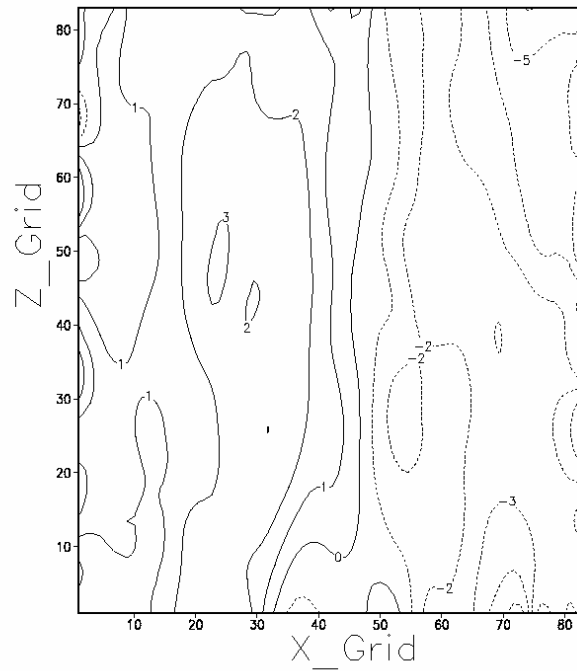


圖 3.6 風場反演得到的 w 分量

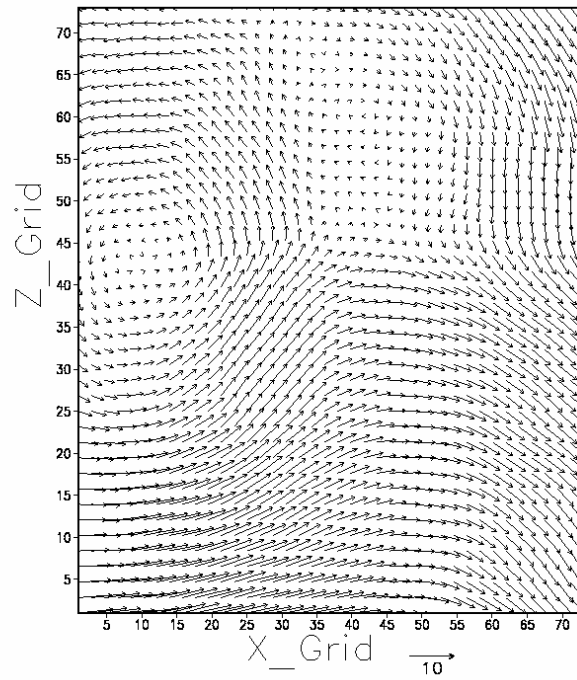


圖 3.7 簡單平流方程式模擬得到的向量場 (u 和 w 合成)

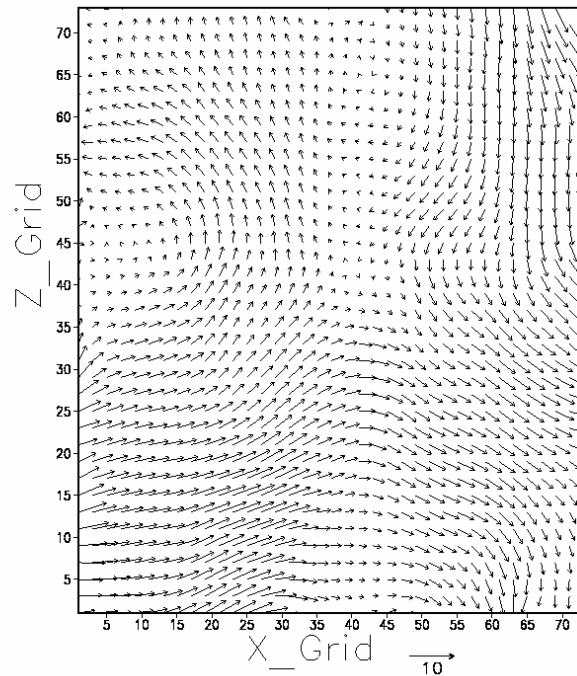


圖 3.8 反演得到的向量場 (u 和 w 合成)

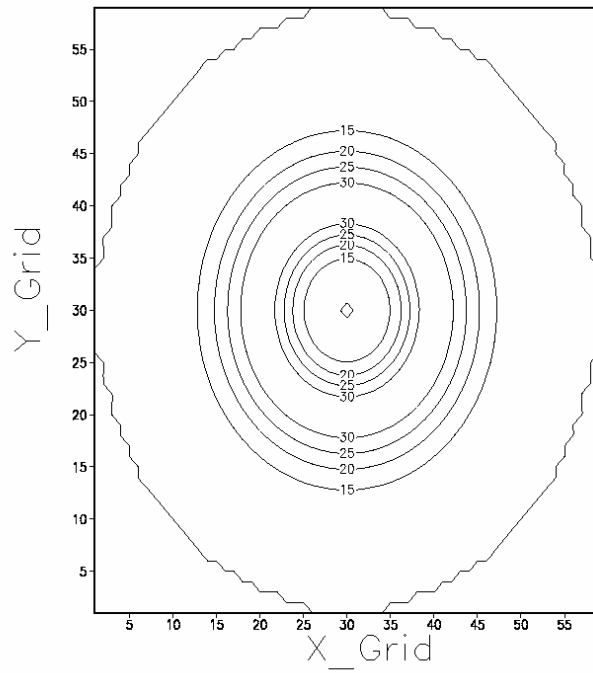


圖 4.1 模式模擬得到的回波，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Z=11

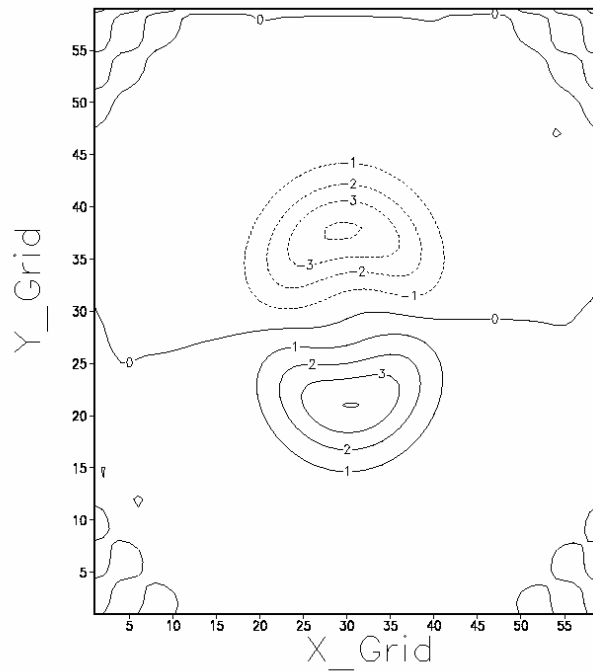


圖 4.2 模式模擬得到的徑向風，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Z=11

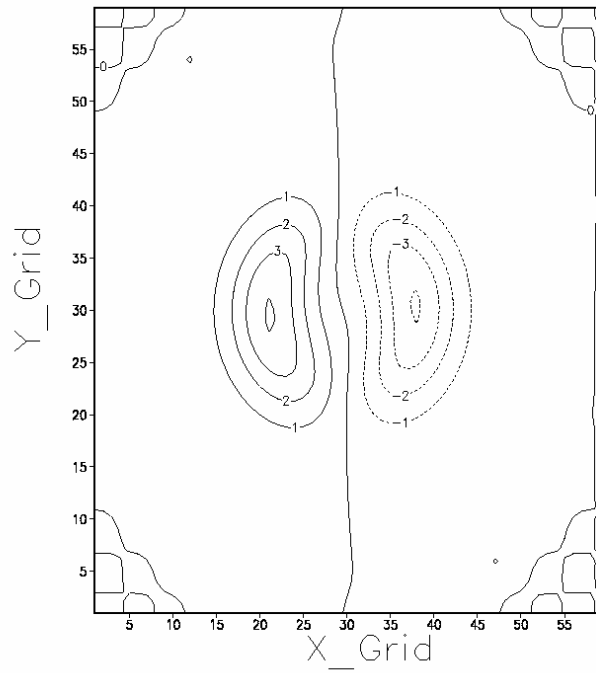


圖 4.3 模式模擬得到的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

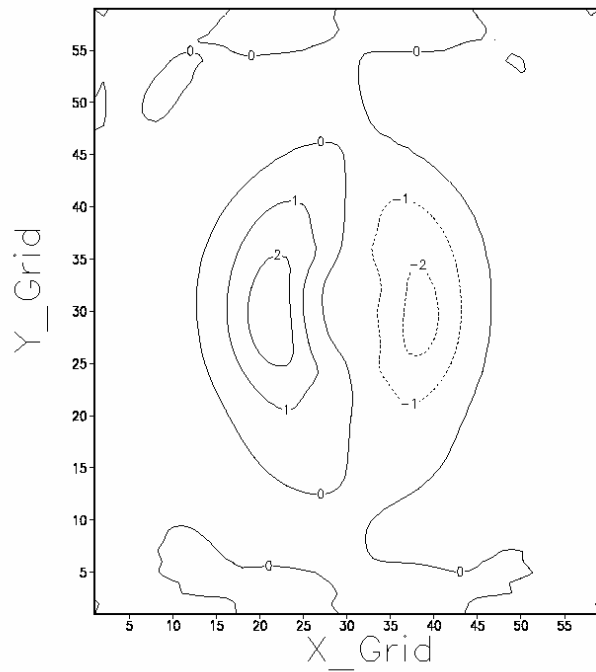


圖 4.4 反演得到的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$ ，與圖 4.3 比較  $RMSE=0.483$ ， $RRMSE=0.529$ ， $SCC=0.963$

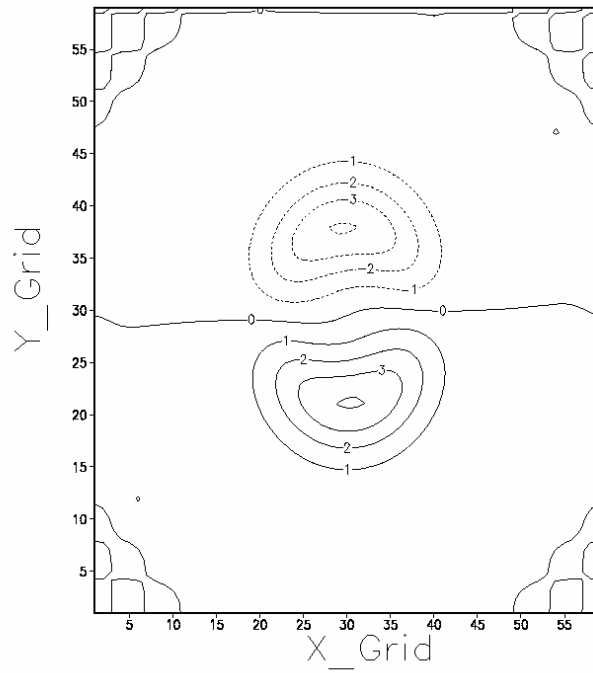


圖 4.5 模式模擬得到的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

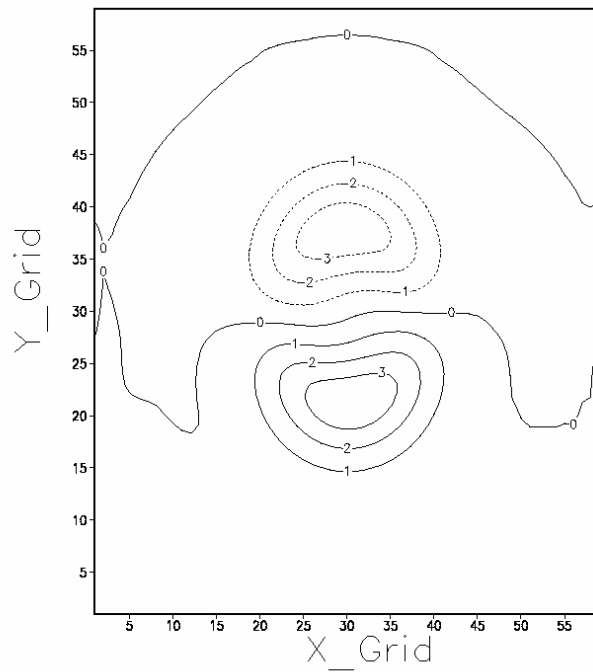


圖 4.6 反演得到的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$ ，與圖 4.5 比較， $RMSE=0.054$ ， $RRMSE=0.059$ ， $SCC=0.998$



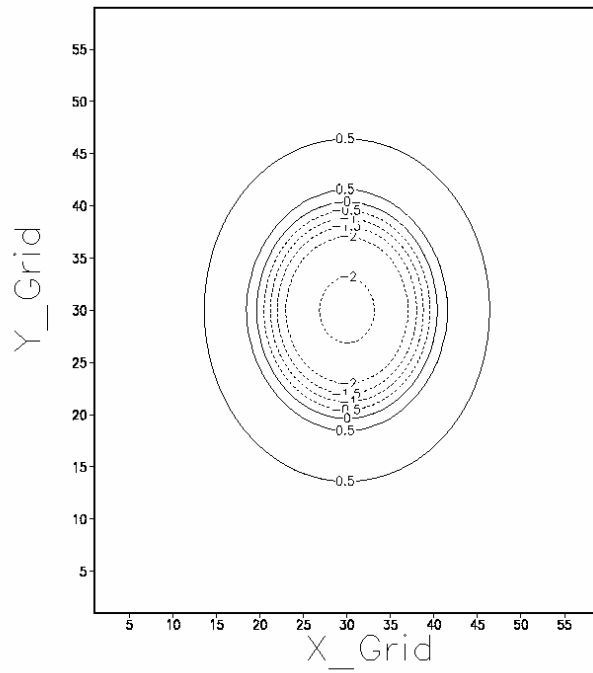


圖 4.7 模式得到的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

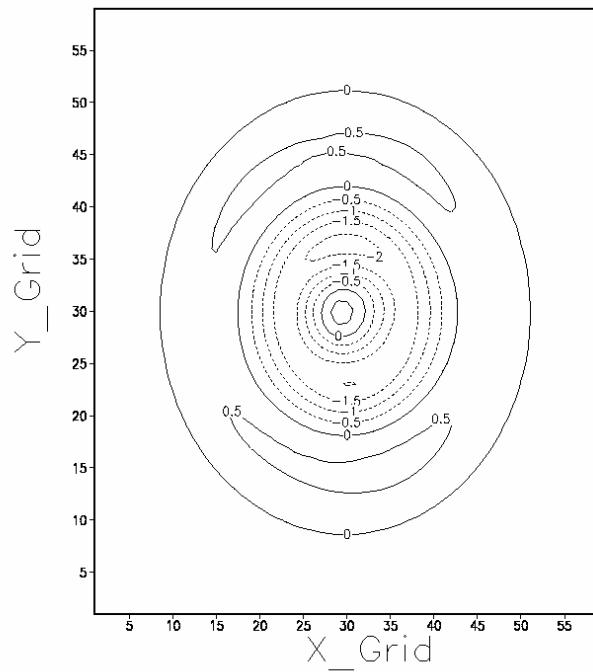


圖 4.8 反演得到的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$ ，與圖 4.7 比較  $RMSE=0.344$ ， $RRMSE=0.689$ ， $SCC=0.740$

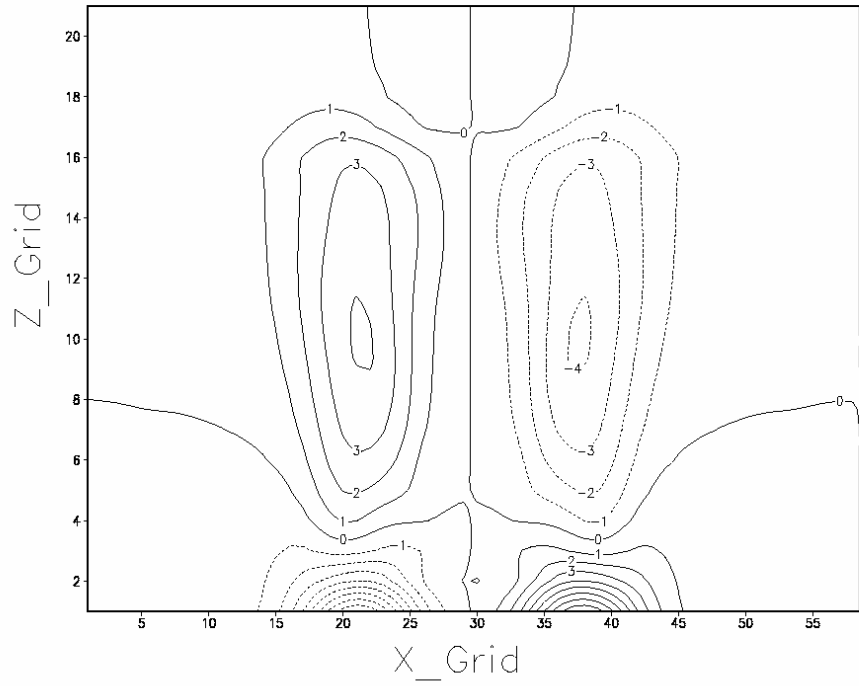


圖 4.9 模式模擬的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$

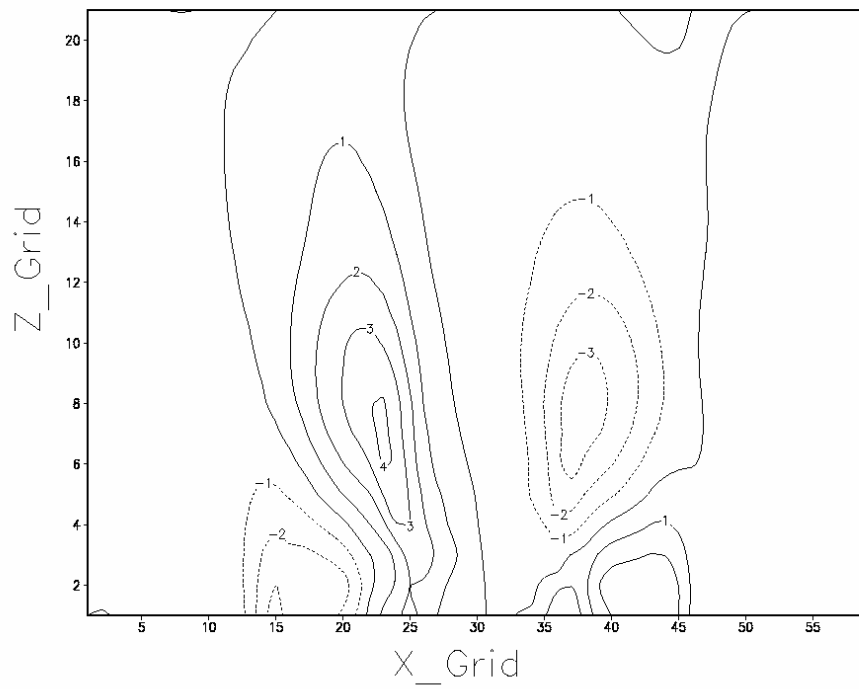


圖 4.10 反演得到的  $u$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$ ，與圖 4.9 比較  $RMSE=0.256$ ， $RRMSE=0.748$ ， $SCC=0.663$

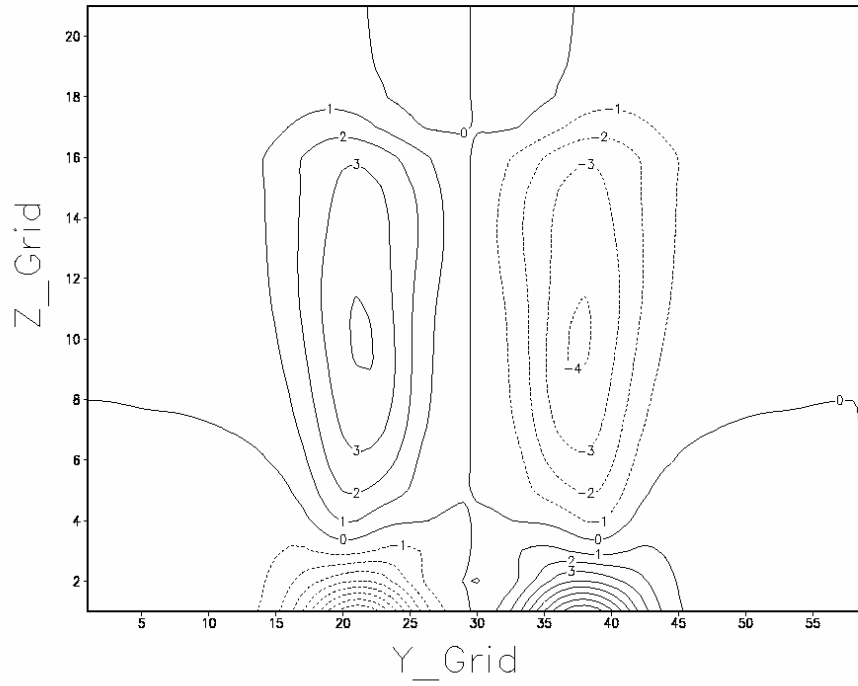


圖 4.11 模式模擬的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$

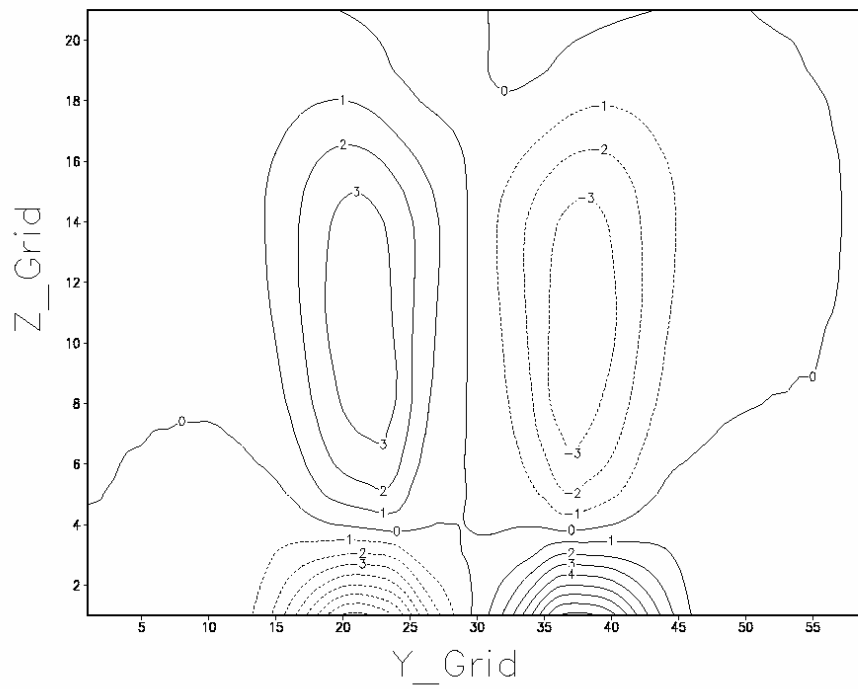


圖 4.12 反演得到的  $v$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$ ，與圖 4.11 比較  $RMSE=0.106$ ， $RRMSE=0.311$ ， $SCC=0.963$

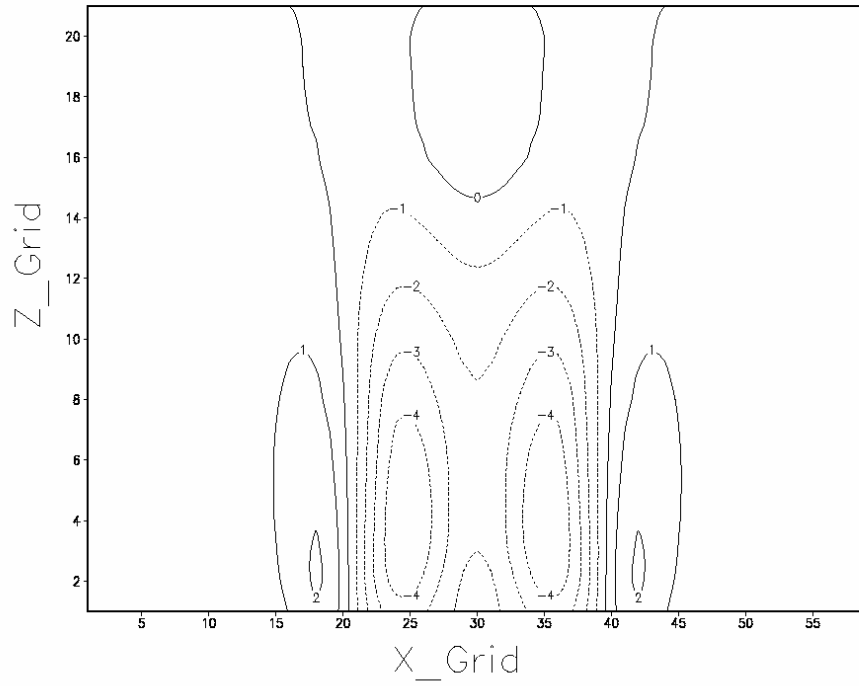


圖 4.13 模式模擬的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$

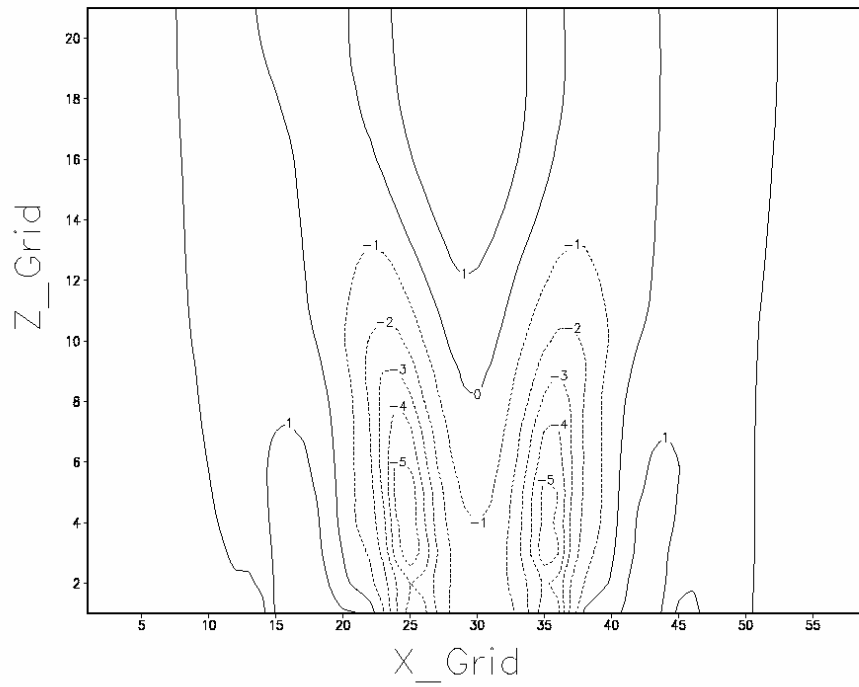


圖 4.14 反演得到的  $w$ ，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$ ，與圖 4.13 比較  $RMSE=0.631$ ， $RRMSE=0.459$ ， $SCC=0.888$

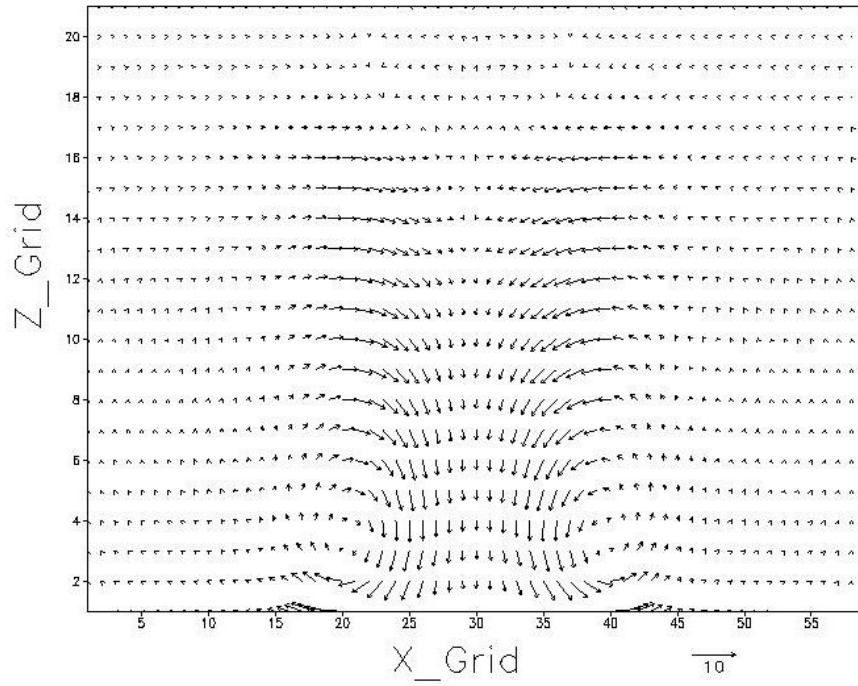


圖 4.15 模式模擬 u 和 w 合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Y=30

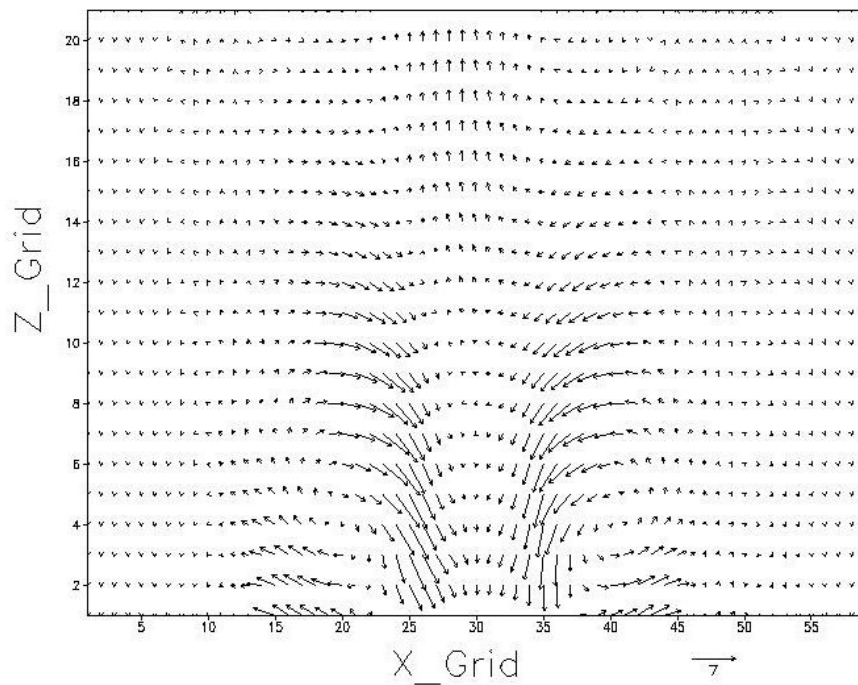


圖 4.16 反演得到的 u 和 w 合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Y=30

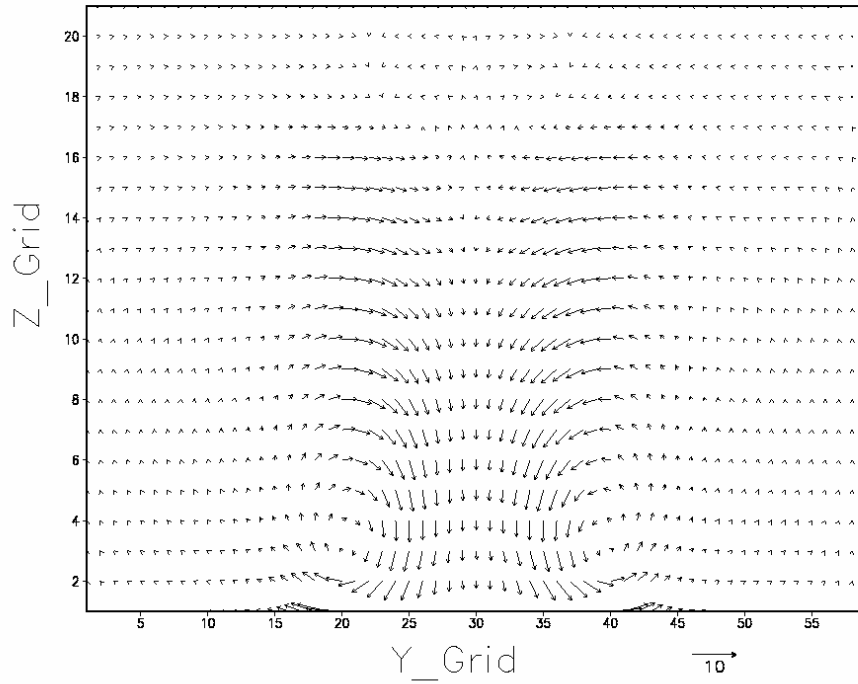


圖 4.17 模式模擬  $v$  和  $w$  合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$

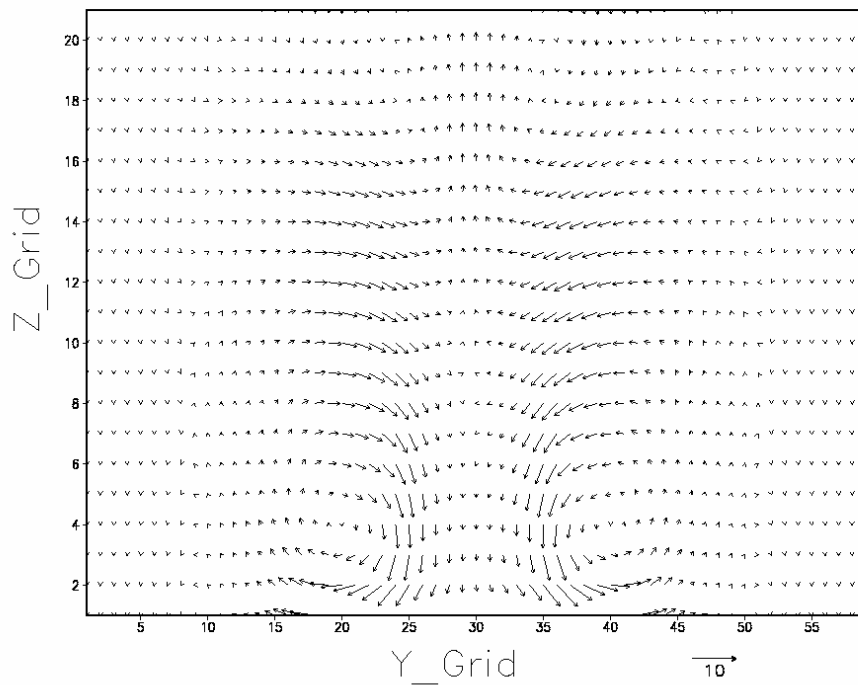


圖 4.18 模式模擬  $v$  和  $w$  合成的向量場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $X=30$

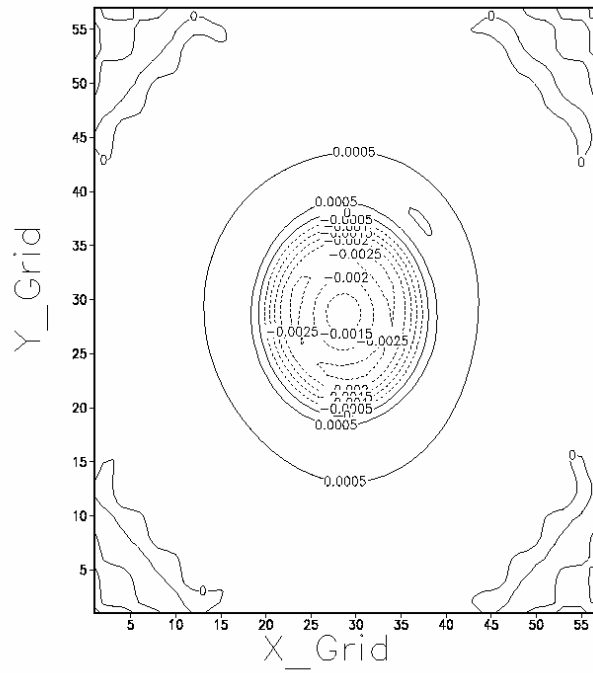


圖 4.19 模式模擬輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Z=11

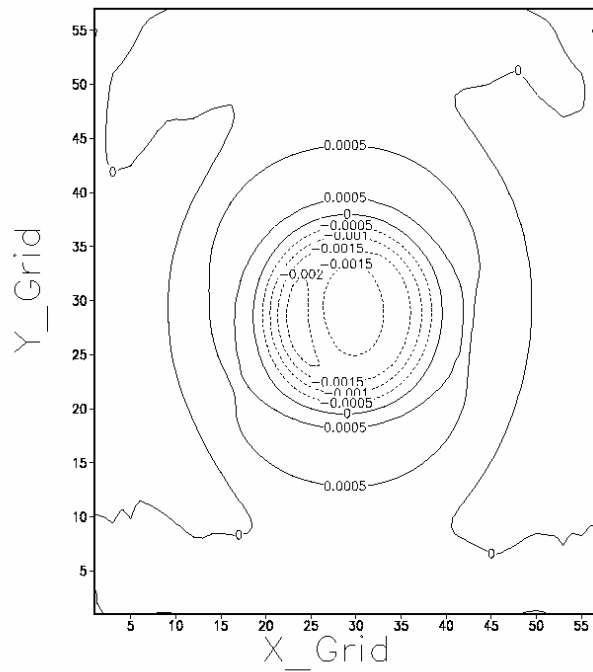


圖 4.20 反演的輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Z=11

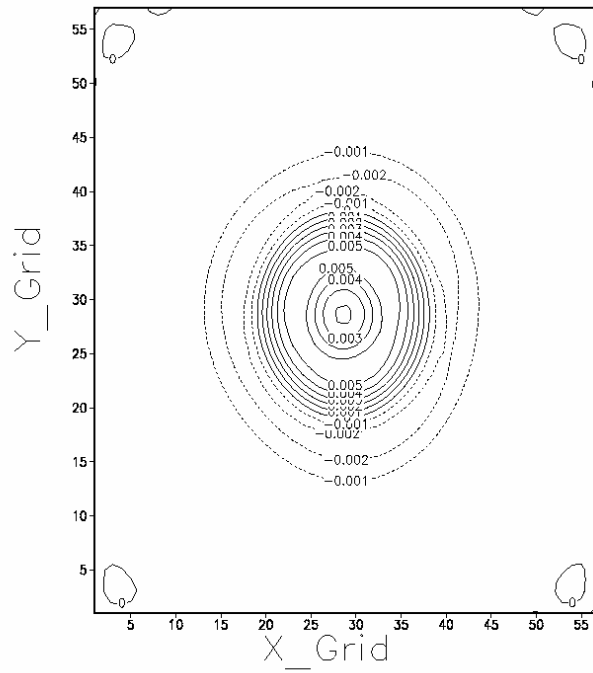


圖 4.21 模擬的輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Z=2

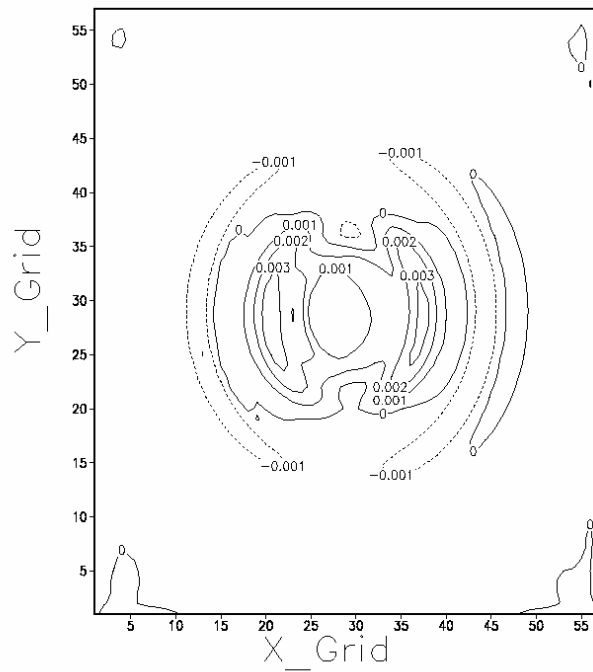


圖 4.22 反演的輻合輻散場，無系統移速，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里，Z=2



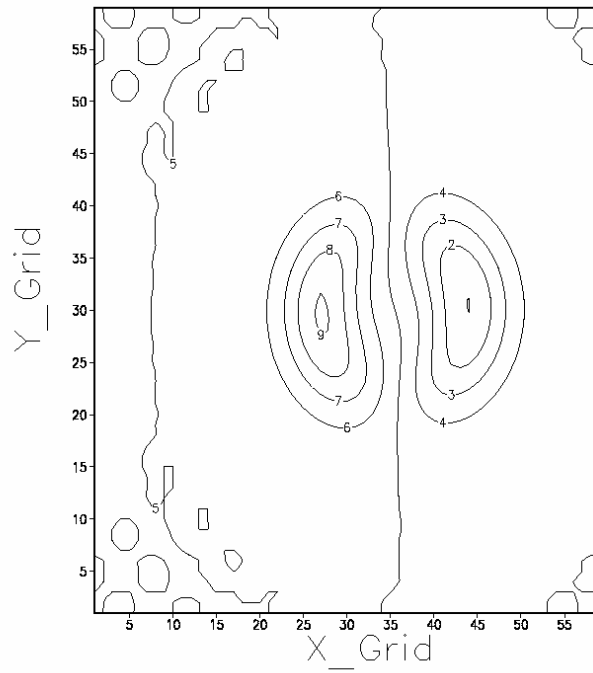


圖 4.23 模式模擬的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

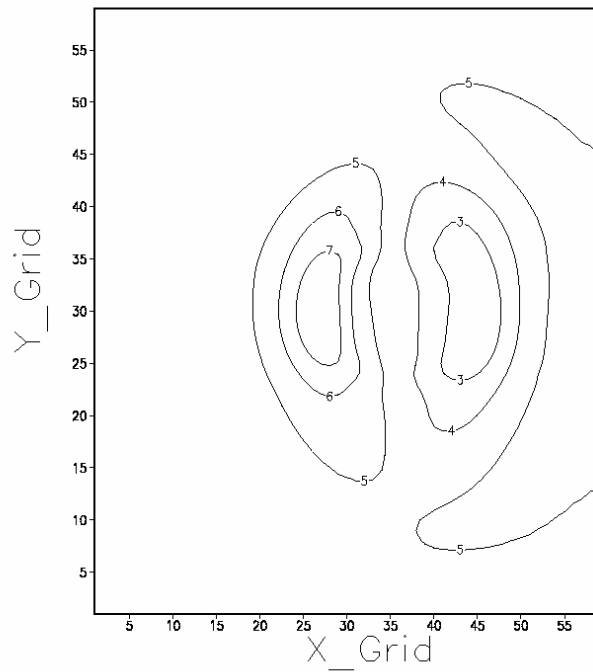


圖 4.24 反演得到的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$ ，與圖 4.23 比較  $\text{RMSE}=0.486$ ， $\text{RRMSE}=0.096$ ， $\text{SCC}=0.995$

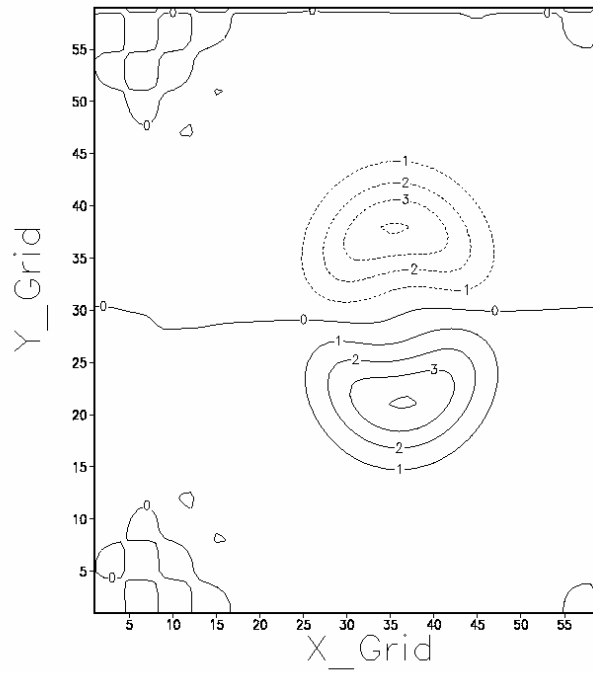


圖 4.25 模式模擬的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

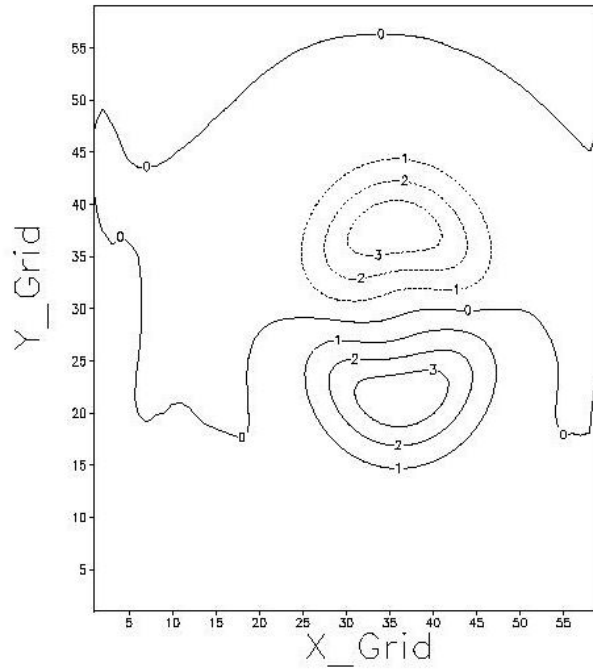


圖 4.26 反演得到的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$ ，與圖 4.25 比較  $\text{RMSE}=0.052$ ， $\text{RRMSE}=0.057$ ， $\text{SCC}=0.999$

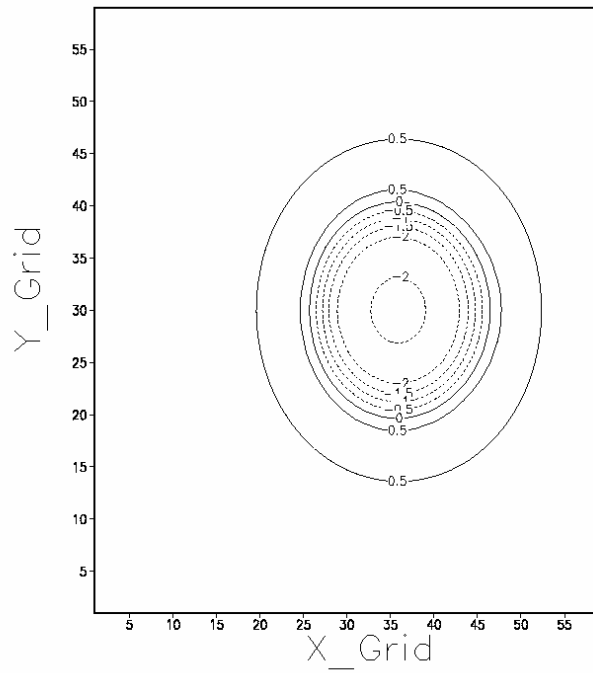


圖 4.27 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，間隔時間 3 分鐘，距離雷達 100 公里， $Z=11$

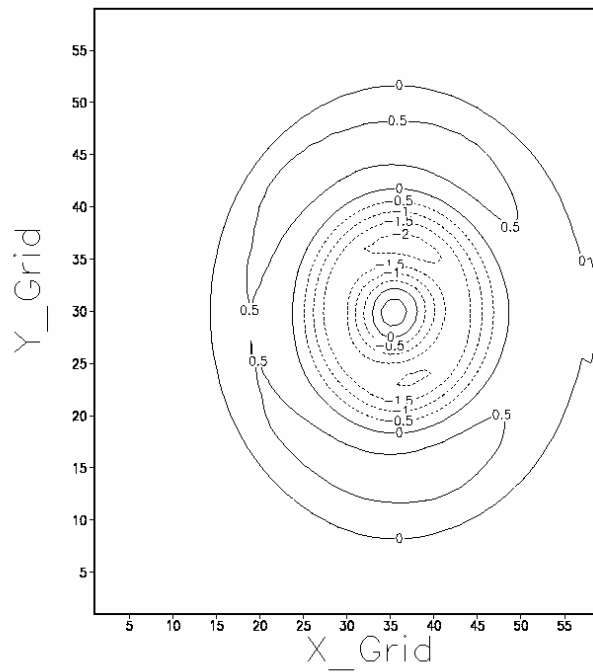


圖 4.28 反演得到的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，間隔時間 3 分鐘，距離雷達 100 公里， $Z=11$ ，與圖 4.27 比較  $\text{RMSE}=0.343$ ， $\text{RRMS}=0.688$ ， $\text{SCC}=0.741$

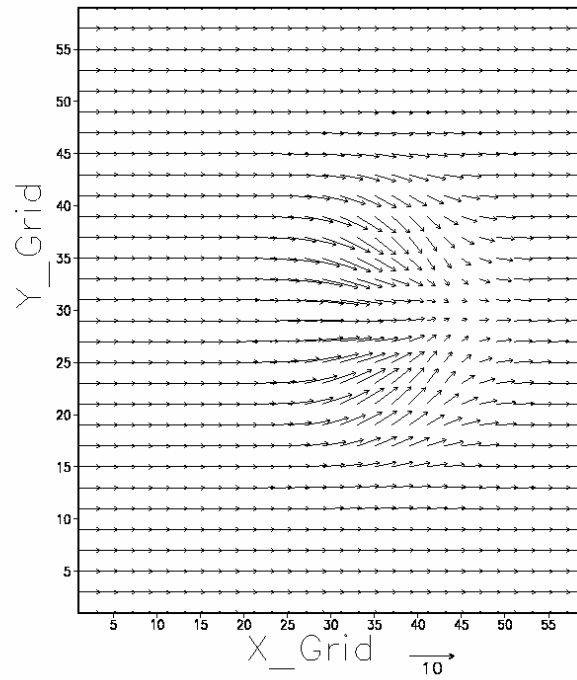


圖 4.29 反演得到的  $u$  和  $v$  合成的向量場，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

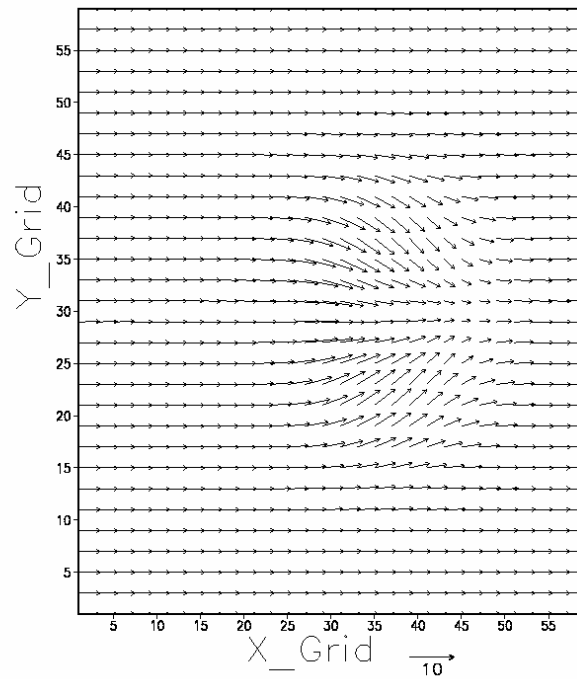


圖 4.30 反演得到的  $u$  和  $v$  合成的向量場，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Z=11$

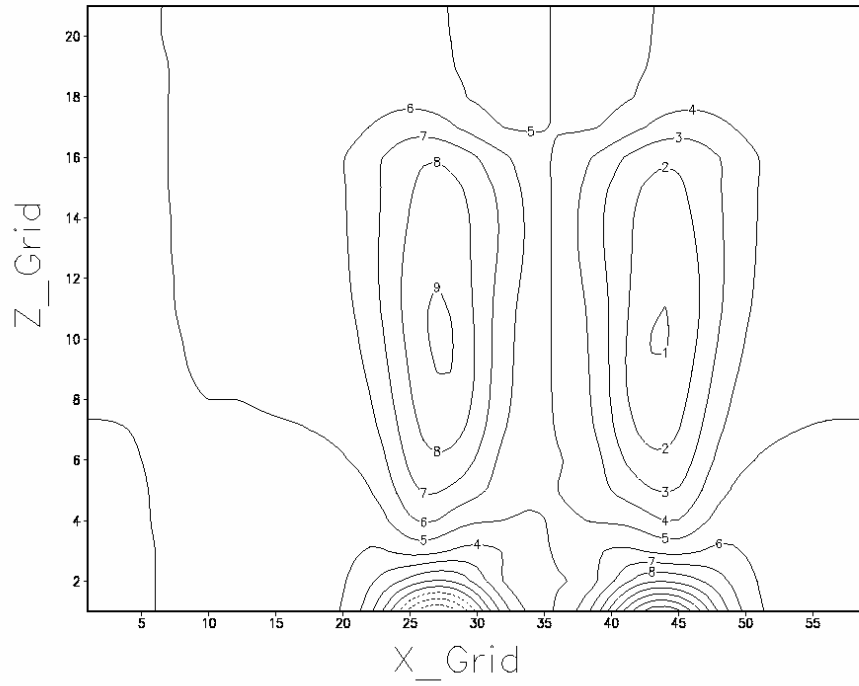


圖 4.31 模式模擬的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$

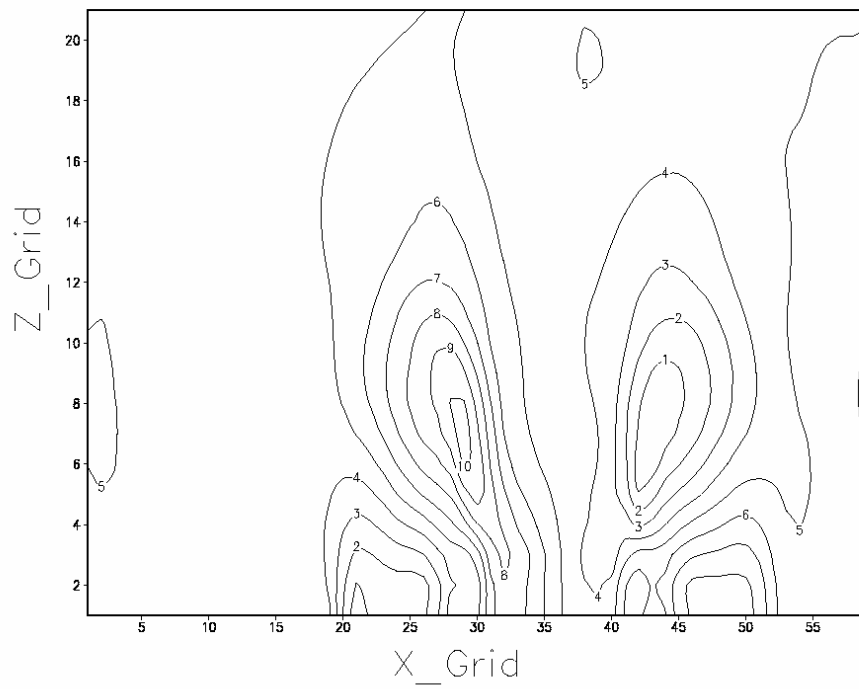


圖 4.32 反演得到的  $u$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$ ，與圖 4.31 比較  $\text{RMSE}=0.934$ ， $\text{RRMSE}=0.170$ ， $\text{SCC}=0.985$

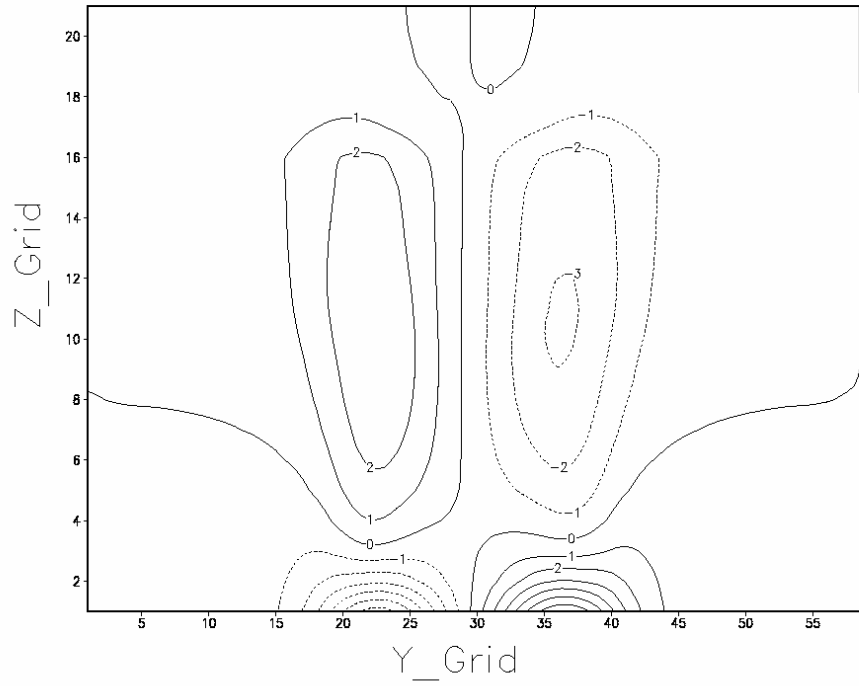


圖 4.33 模式模擬的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$

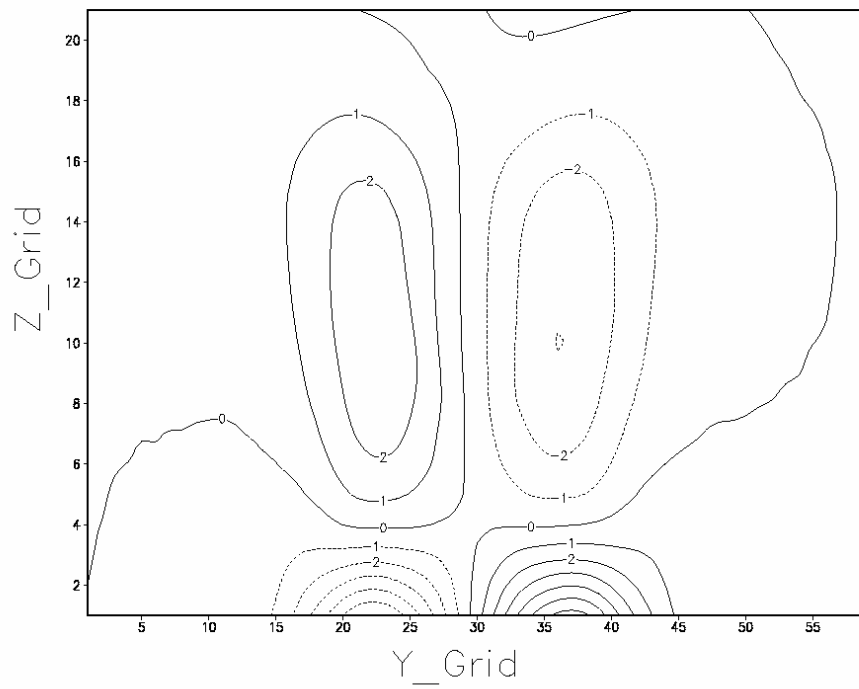


圖 4.34 反演得到的  $v$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$ ，與圖 4.33 比較  $\text{RMSE}=0.202$ ， $\text{RRMSE}=0.169$ ， $\text{SCC}=0.985$

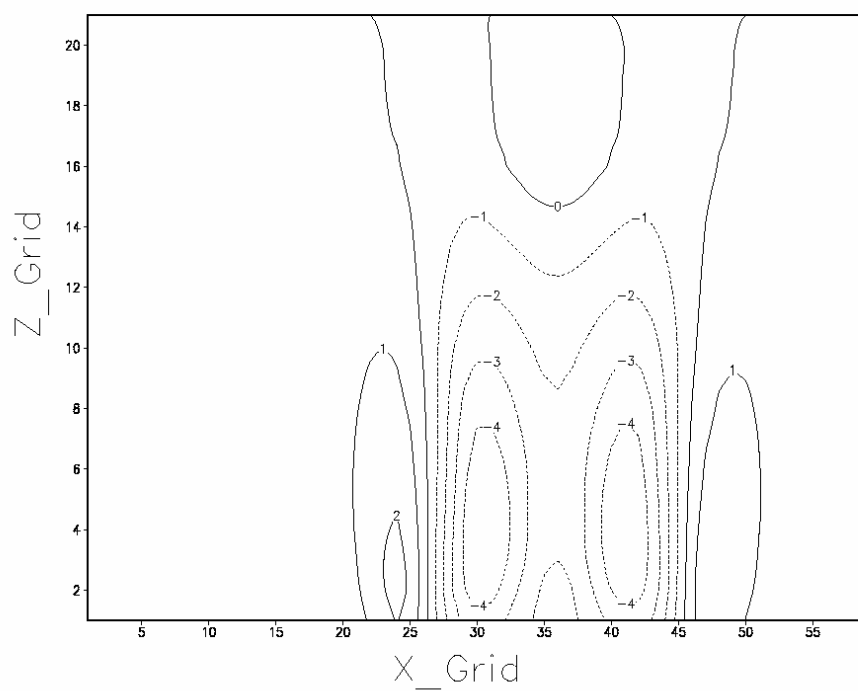


圖 4.35 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$

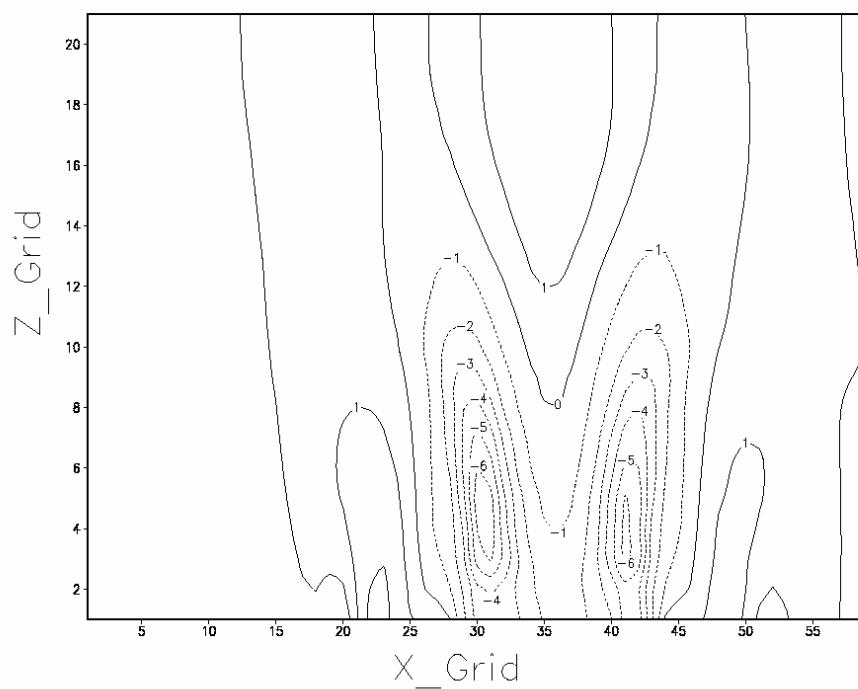


圖 4.36 反演得到的  $w$ ，系統移速  $U=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$ ，與圖 4.35 比較  $\text{RMSE}=0.690$ ， $\text{RRMSE}=0.503$ ， $\text{SCC}=0.867$

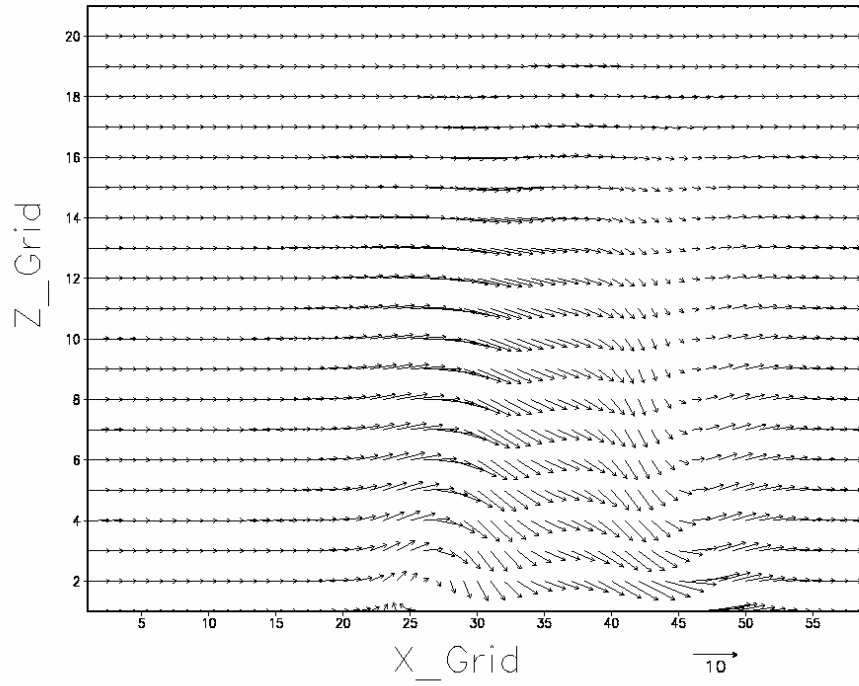


圖 4.37 模式模擬 u 和 w 合成的向量場， $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$

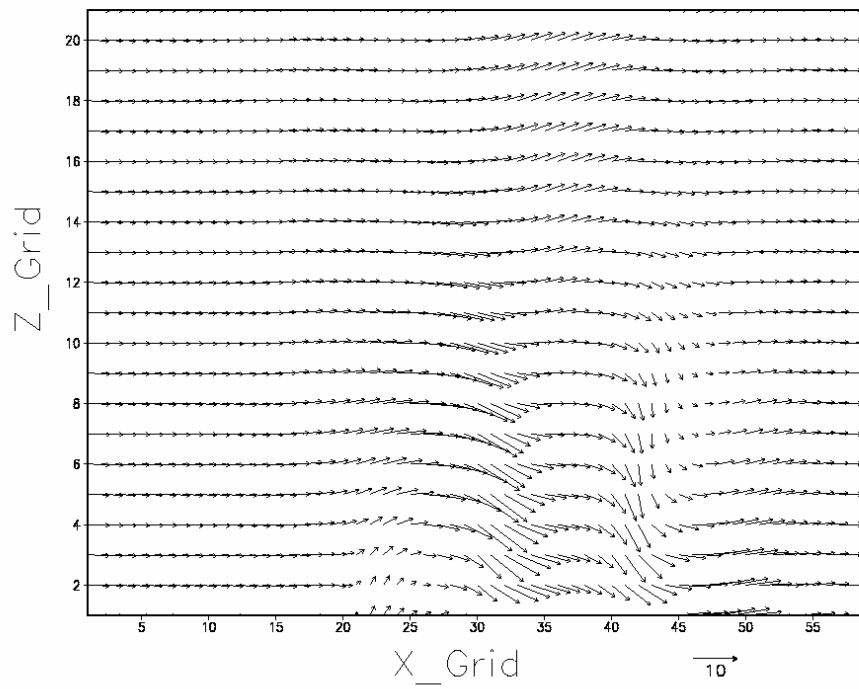


圖 4.38 模式模擬 u 和 w 合成的向量場， $U=5\text{m/s}$ ，3 分鐘的掃瞄策略，距離雷達 100 公里， $Y=30$



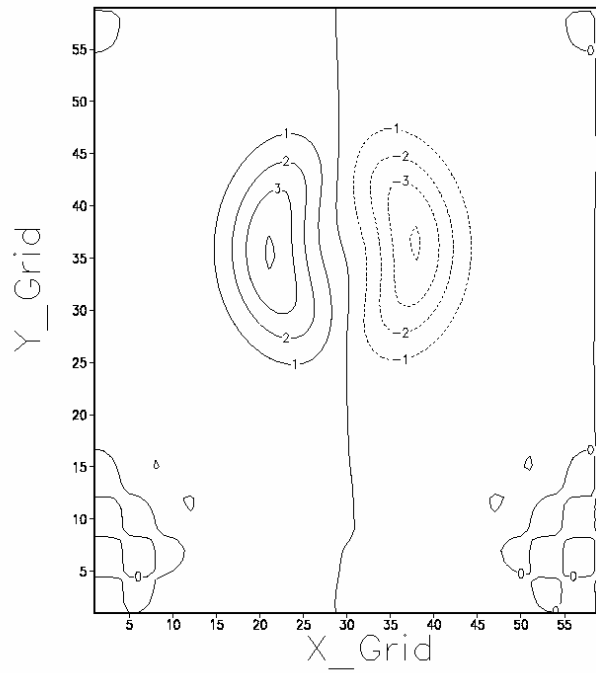


圖 4.39 模式模擬的  $u$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$

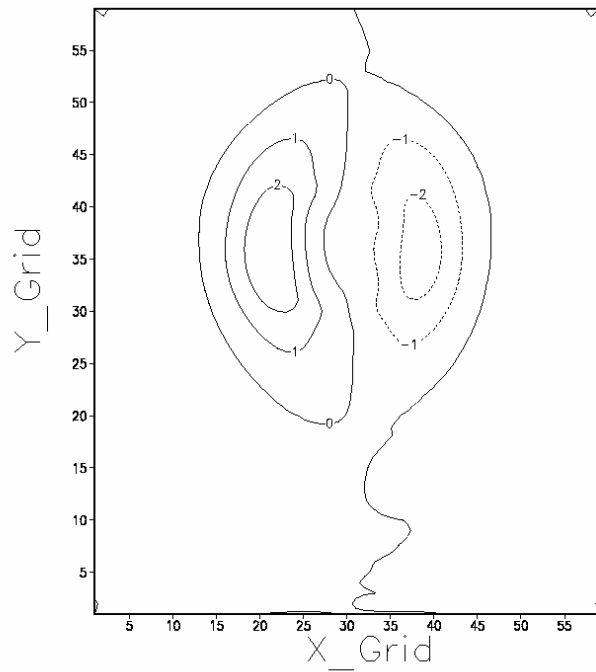


圖 4.40 反演得到的  $u$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$ ，與圖 4.39 比  $\text{RMSE} = 0.452$ ， $\text{RRMSE} = 0.495$ ， $\text{SCC}=0.961$

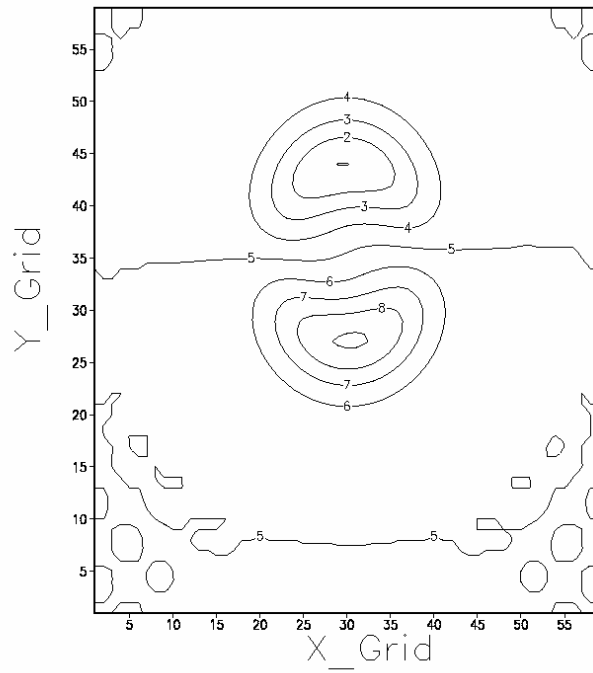


圖 4.41 模式模擬的  $v$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$

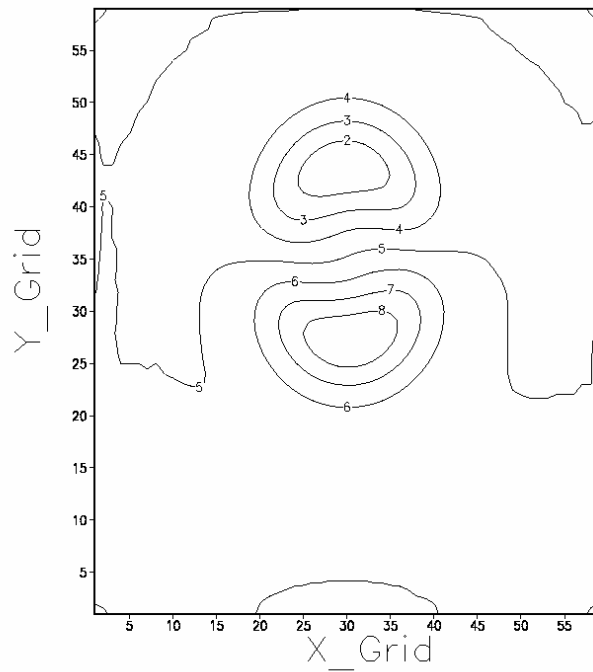


圖 4.42 反演得到的  $v$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$  與圖 4.41 比， $\text{RMSE}=0.055$ ， $\text{RRMSE}=0.010$ ， $\text{SCC}=0.999$

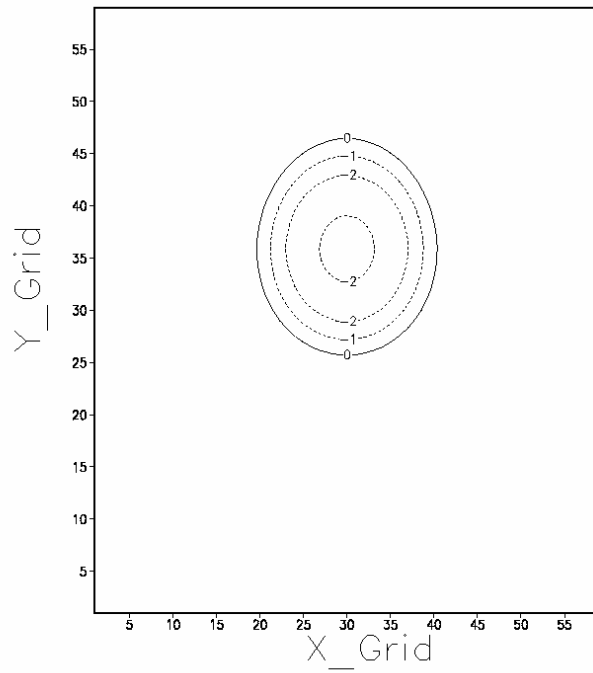


圖 4.43 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$

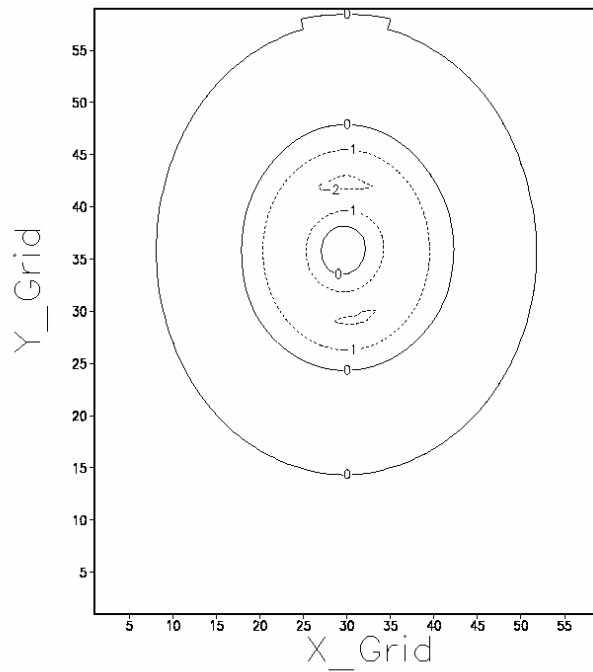


圖 4.44 反演得到的  $w$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Z=11$  與圖 4.43 比較， $\text{RMSE}=0.339$ ， $\text{RRMSE}=0.679$ ， $\text{SCC}=0.748$

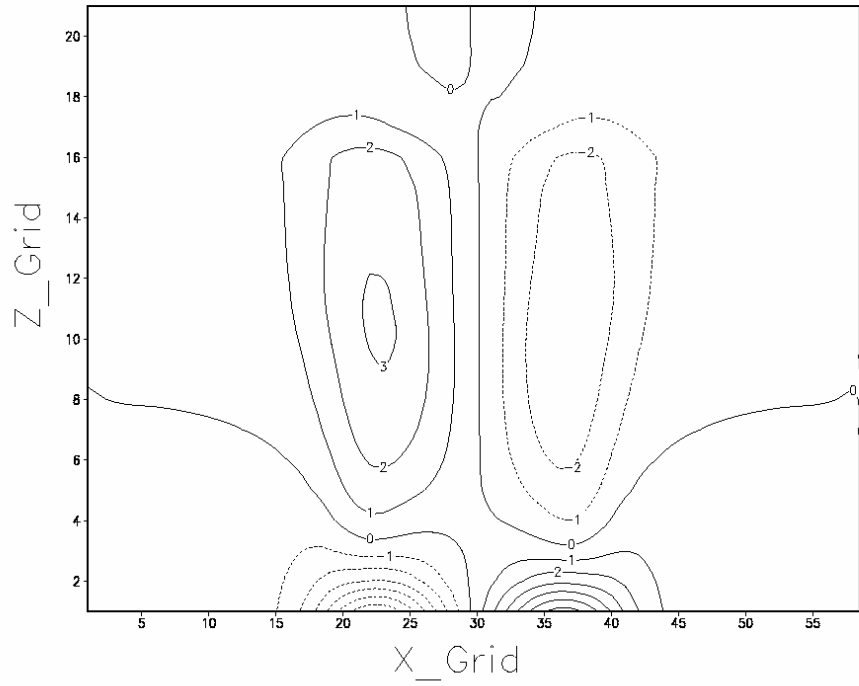


圖 4.45 模式模擬的  $u$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$

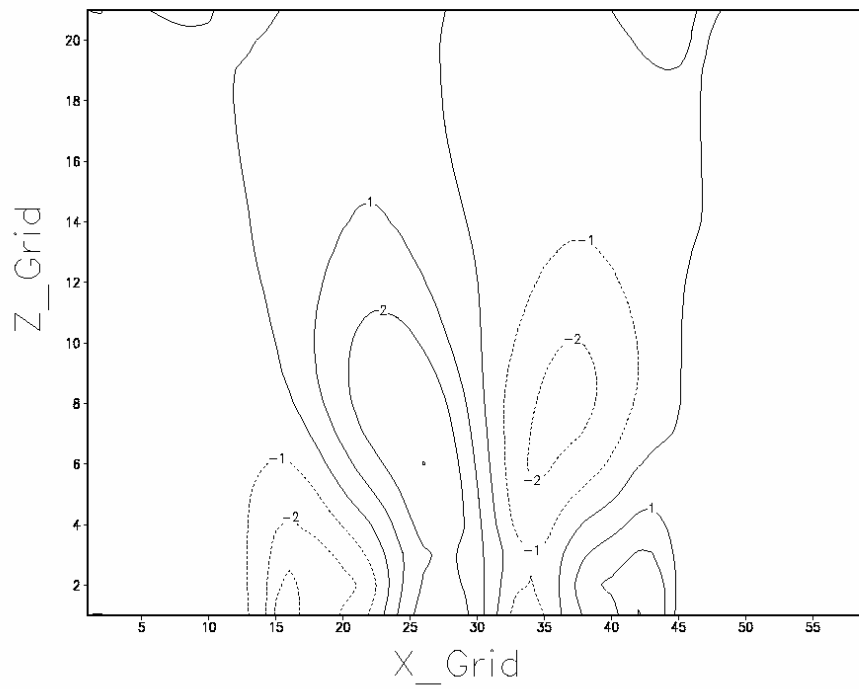


圖 4.46 反演得到的  $u$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $Y=30$ ，與圖 4.45 比較  $\text{RMSE}=0.773$ ， $\text{RRMSE}=0.648$ ， $\text{SCC}=0.767$

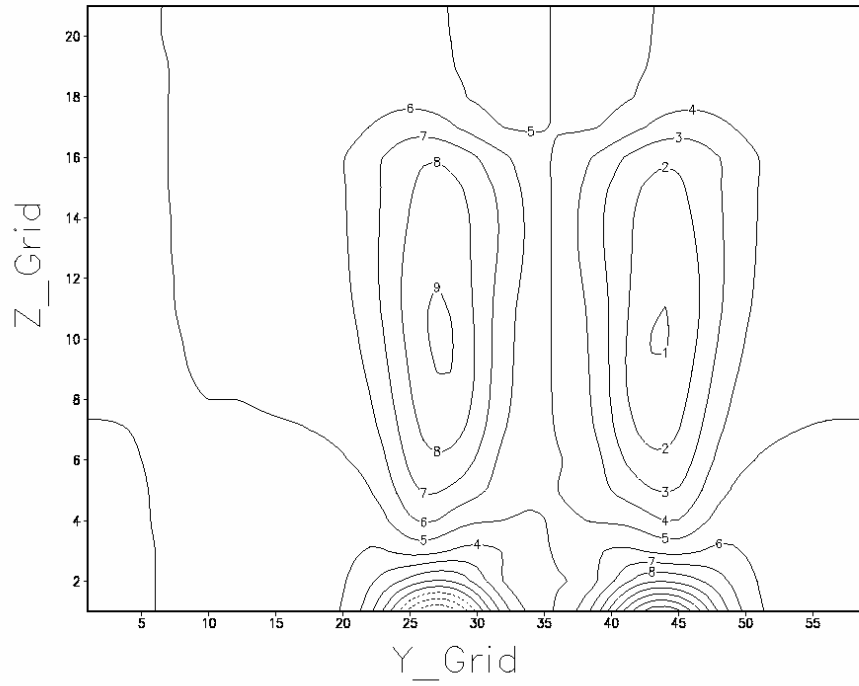


圖 4.47 模式模擬的  $v$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$

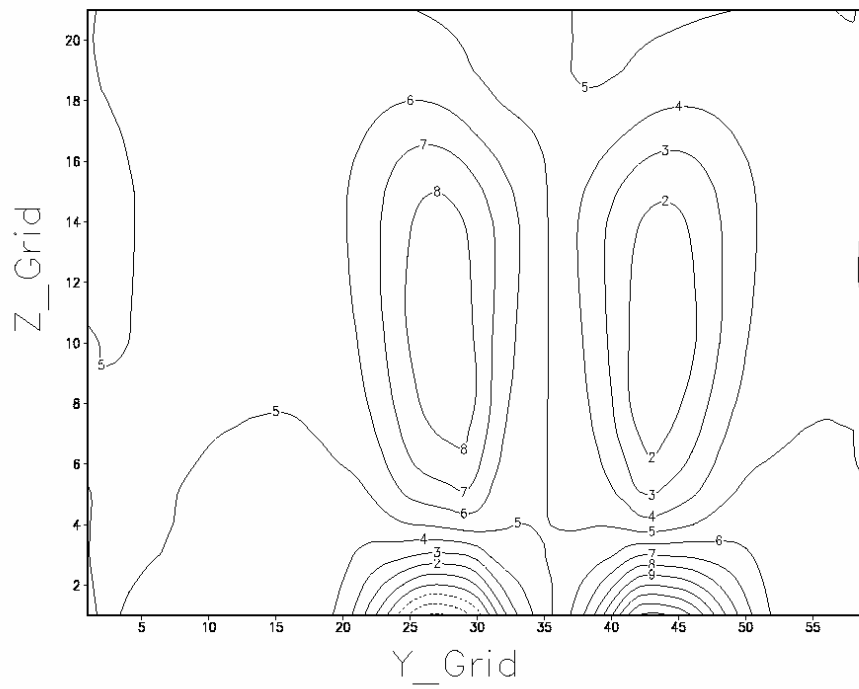


圖 4.48 反演得到的  $v$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$ ，與圖 4.47 比較  $\text{RMSE}=0.176$ ， $\text{RRMSE}=0.032$ ， $\text{SCC}=0.99$

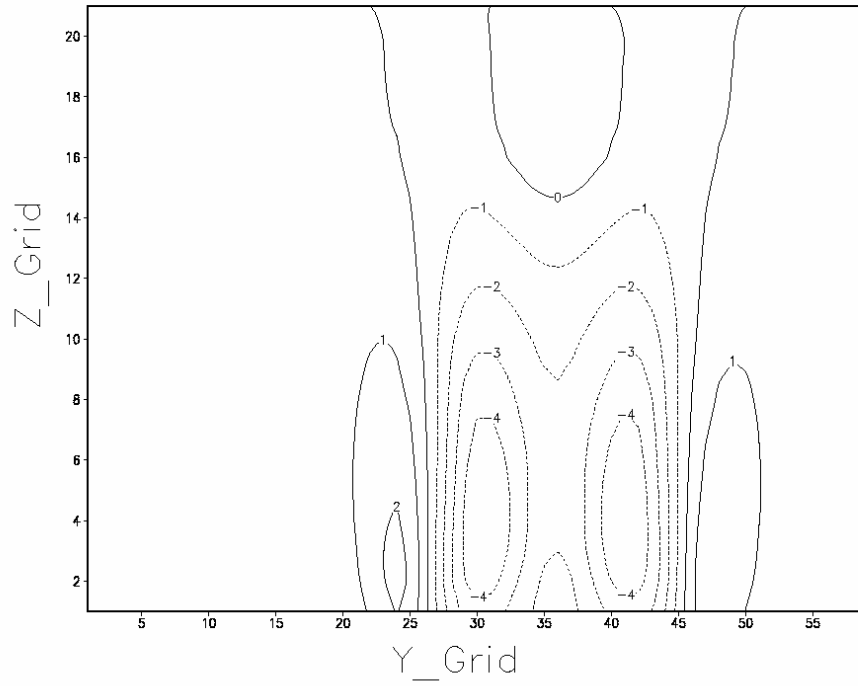


圖 4.49 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$

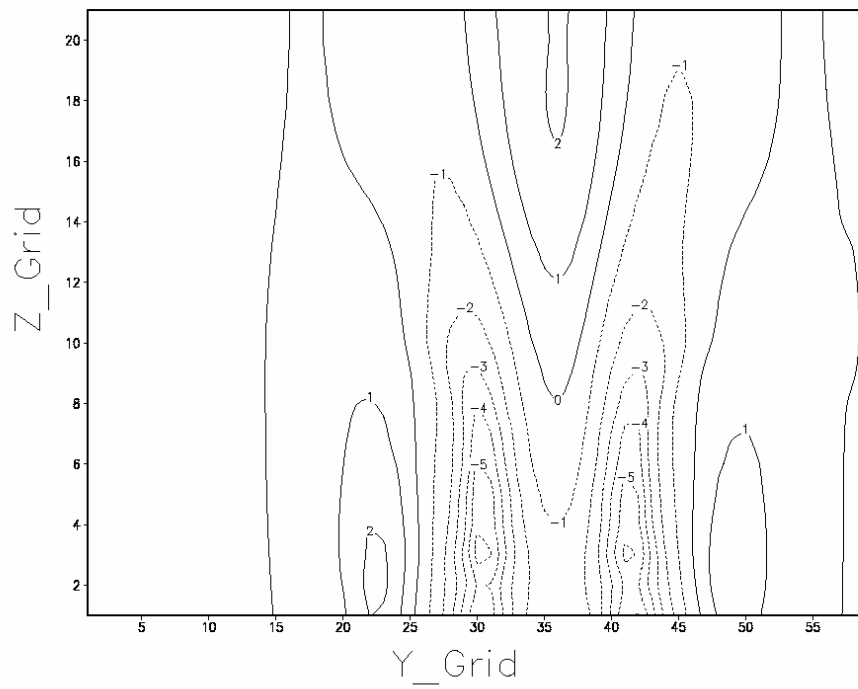


圖 4.50 反演得到的  $v$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$ ，與圖 4.49 比較  $\text{RMSE}=0.176$ ， $\text{RRMSE}=0.032$ ， $\text{SCC}=0.99$

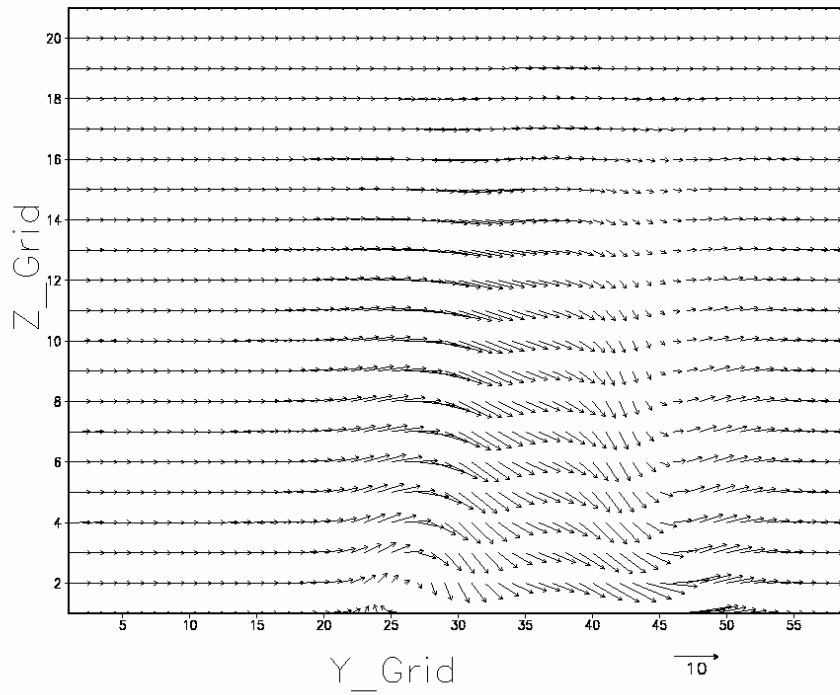


圖 4.51 模式模擬的  $w$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$

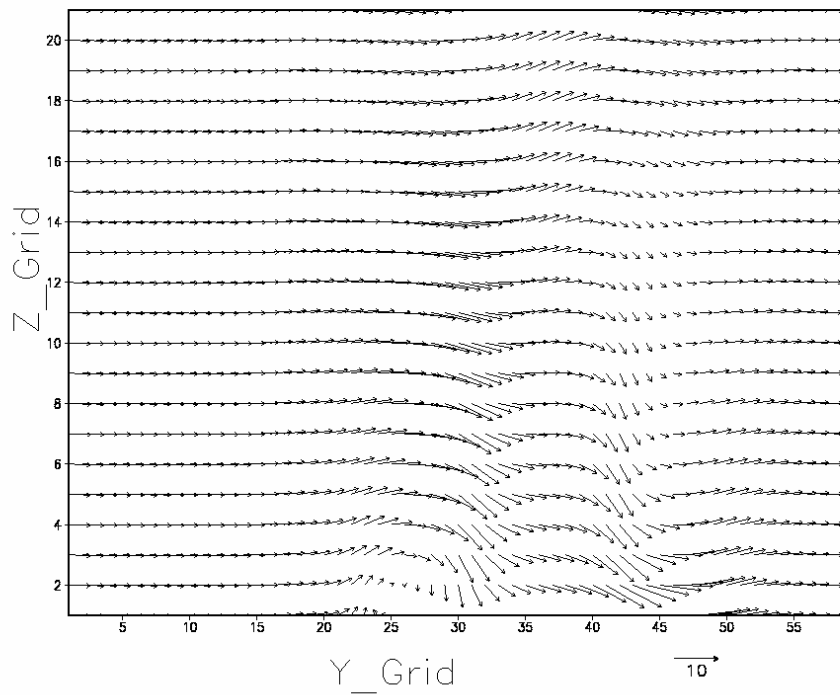


圖 4.52 反演得到的  $w$ ，系統移速  $V=5\text{m/s}$ ，距離雷達 100 公里，3 分鐘的掃瞄策略， $X=30$